ЗАПИСКИ

ПО

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОМУ И ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНІЯМЪ.

СОСТАВИЛЪ П. РОЩИНЪ.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

Вас. Остр., 9 лин., № 12.

1888.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦІЙ ОБЪ ОДНОЙ ПЕРЕМѢННОЙ.

НЕОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

316. Дѣйствіе, обратное дифференцированію, называютъ *интегрированіемъ*. Оно состоитъ въ пріемахъ, употребляемыхъ для отысканія функціи по данному ея дифференціалу. Функцію по отношенію къ ея дифференціалу называютъ *интеграломъ* и обозначаютъ знакомъ $\int$; такъ, если:

$$d\varphi(x) = f(x)\,dx,$$

то:

$$\varphi(x) = \int f(x)\,dx.$$

Изъ понятія объ интегралѣ видимъ, что производная по x отъ $\int f(x)\,dx$ равна $f(x)$, а дифференціалъ того же интеграла равенъ $f(x)\,dx$.

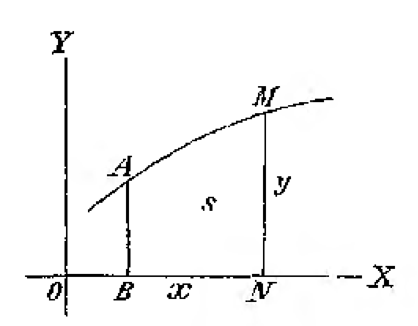
$$\left[\int f(x)\,dx\right]'_x = f(x), \qquad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Всякая сплошная функція имѣетъ интегралъ. Дѣйствительно: вообразимъ кривую, уравненіе которой относительно прямоугольныхъ осей координатъ было-бы:

$$y = f(x).$$

По сплошности функціи f, и кривая эта будетъ сплошная, по-

крайней мѣрѣ на нѣкоторомъ протяженіи. Площадь S, ограниченная кривою, осью OX и двумя ординатами AB и MN (AB постоян-



ная ордината, а MN перемѣнная, отвѣчающая абсциссѣ x) будетъ также сплошною функціею x. Эта функція и есть одинъ изъ интеграловъ выраженія $f(x)\,dx$, такъ какъ, по № 172, мы знаемъ, что:

$$dS = ydx = f(x)\,dx.$$

Докажемъ, что *всякая сплошная функція имѣетъ безчисленное множество интеграловъ, разнящихся между собою на величины постоянныя.* Пустъ выраженію $f(x)\,dx$ соотвѣтствуютъ два интеграла: $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, т. е.:

$$\varphi'(x) = f(x), \qquad \varphi_1'(x) = f(x);$$

тогда:

$$\varphi_1'(x) - \varphi'(x) = 0, \text{ или: } [\varphi_1(x) - \varphi(x)]' = 0,$$

откуда заключаемъ, что разность $\varphi_1(x) - \varphi(x)$ есть величина постоянная, хотя совершенно произвольная. Обозначая эту постоянную чрезъ C, имѣемъ:

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + C.$$

По этому, опредѣливши одинъ изъ интеграловъ выраженія $f(x)\,dx$, мы получимъ всѣ, прибавляя къ найденному интегралу постоянную произвольную:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

Если въ интегралѣ постоянное C остается произвольнымъ, его называютъ *неопредѣленнымъ*. Въ немъ C можно разсматривать, какъ произвольную функцію одной или многихъ перемѣнныхъ, независящихъ отъ x.

Опираясь на извѣстныя формулы дифференцированія мы можемъ написать непосредственно слѣдующіе интегралы:

$$\int dx = x + C$$

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{2\,dx}{x^3} = -\frac{1}{x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C$$

$$\int \frac{dx}{x} Le = Lx + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,la\,dx = a^x + C$$

$$\int a^{\alpha x}\,\alpha la \cdot dx = a^{\alpha x} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,cotg} x + C_1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} = \operatorname{arc\,sec} x + C = -\operatorname{arc\,cosec} x + C_1.$$

Въ нихъ x можетъ быть какъ независимымъ перемѣннымъ, такъ и сложнымъ числомъ, и по этому, подставляя на мѣсто x какія ни будь функціи x, мы выведемъ изъ нихъ другіе болѣе сложные интегралы. Такъ, подставляя вмѣсто x въ приведенные интегралы, въ третій: $\sin^2 5x$, въ шестой: $4\,lx$, въ восьмой: $\operatorname{arc\,tg} 3x$, въ

десятый: $\sqrt{\sin x}$, въ пятнадцатый: $\sqrt{x}$ и въ двадцатый: $l\sin x$, получимъ:

$$\int 30\sin^5 5x\cos 5x\,dx = \sin^6 5x + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{lx}} = 2\sqrt{lx} + C$$

$$\int \frac{3\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arc\,tg} 3x} = l\operatorname{arc\,tg} 3x + C$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}} = \operatorname{tg}\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{\sin x}}\cos x\,dx}{2\sqrt{\sin x}} = e^{\sqrt{\sin x}} + C$$

$$\int \frac{\operatorname{cotg} x\,dx}{1+(l\sin x)^2} = \operatorname{arc\,tg} l\sin x + C.$$

317. Интегралъ степени перемѣнной независимой.

Каково-бы постоянное a ни было, исключая -1, имѣемъ:

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C;$$

а при $a = -1$:

$$\int x^{-1}\,dx = \int\frac{dx}{x} = lx + C.$$

Если a отрицательное, то, ставя на видъ знакъ, т. е. подставляя $-m$ вмѣсто a, получимъ:

$$\int x^{-m}\,dx = \frac{x^{-m+1}}{-m+1} + C,$$

или

$$\int\frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + C.$$

Если a число дробное, то, замѣняя его чрезъ $\frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя, получимъ:

$$\int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C,$$

или
$$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \frac{n}{n+m}\, x \sqrt[n]{x^m} + C.$$

Замѣненіе же m на $-m$ приведетъ къ формулѣ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{n}{n-m} \cdot \frac{x}{\sqrt[n]{x^m}} + C.$$

Примѣры:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\int \sqrt{x}\cdot dx = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}\, x\sqrt[3]{x} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x^3}\,dx = \frac{3}{5}\, x\sqrt[3]{x^2} + C$$

$$\int \sqrt[7]{x^5}\,dx = \frac{7}{12}\, x\sqrt[7]{x^5} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{x^2}} = -\frac{5}{12\,x^2\sqrt[5]{x^2}} + C$$

$$\int x^{\sin\sqrt[3]{2}}\,dx = \frac{x^{1+\sin\sqrt[3]{2}}}{1+\sin\sqrt[3]{2}} + C.$$

318. Интегралъ суммы. Дифференціалы интеграла

$$\int [f(x) + f_1(x)]\,dx$$

и суммы:

$$\int f(x)\,dx + \int f_1(x)\,dx$$

одинаковы; по этому:

$$\int [f(x) + f_1(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int f_1(x)\,dx + C.$$

Здѣсь постоянную произвольную C можно опустить, потому что въ послѣднихъ интегралахъ, какъ неопредѣленныхъ, она подразумѣвается, и дать, стало-быть, послѣдней формулѣ видъ:

$$\int [f(x) + f_1(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int f_1(x)\,dx;$$

а прочитать ее такъ: *интегралъ суммы двухъ функцій равенъ суммѣ ихъ интеграловъ.*

Теорема эта легко распространяется и на сумму какого-угодно числа членовъ, а также на разность:

$$\int [f(x) + f_1(x) + f_{11}(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int f_1(x)\,dx + \int f_{11}(x)\,dx$$

$$\int [f(x) - f_1(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int f_1(x)\,dx.$$

319. Интегралъ произведенія функціи на постоянное число.

Дифференціалы выраженій: $\int af(x)\,dx$ и $a\int f(x)\,dx$, въ которыхъ a постоянное, одинаковы; слѣдовательно:

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx + C,$$

или, опуская постоянную произвольную C и подразумѣвая ее въ самихъ интегралахъ:

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,$$

т. е. *интегралъ произведенія функціи на постоянное число равенъ произведенію интеграла функціи на постоянное число.* По этой теоремѣ, постоянный множитель можно вносить подъ знакъ интеграла, и наоборотъ: выносить изъ подъ знака интеграла.

Способы интегрированія.

320. Интегрированіе разложеніемъ. Разлагая подъинтегральную функцію на нѣсколько другихъ и интегрируя каждую изъ послѣднихъ, мы можемъ во многихъ случаяхъ находить интегралъ, опираясь на № 317, т. е. разсматривая интегралъ суммы какъ сумму интеграловъ.

Примѣры:

a) $\int (4x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 7)\,dx =$

$$= \int 4x^5\,dx - \int 3x^4\,dx - \int 5x^3\,dx + \int 6x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 7\,dx =$$

$$=\frac{2x^6}{3}-\frac{3x^5}{5}-\frac{5x^4}{4}+2x^3-x^2+7x+C$$

$$=\frac{40x^6-36x^5-75x^4+120x^3-60x^2+420x}{60}+C.$$

b) $$\int\frac{x^3+\sqrt[3]{x^2}-2}{x}dx=\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{x}\right)dx=\int x^2dx+\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}-2\int\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}-2\,lx+C.$$

c) $$\int\frac{3x^5-10x^4-7x^3+3x^2-5x+1}{x^3}dx=x^3-5x^2-7x+3lx+\frac{5}{x}-\frac{1}{2x^2}+C.$$

d) $$\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}l(x-1)-\frac{1}{2}l(x+1)+C=\frac{1}{2}l\frac{x-1}{x+1}+C\ ^{*)}.$$

e) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx=\int\sqrt{x+1}\cdot dx-\int\sqrt{x}\cdot dx=$$

$$=\frac{2}{3}\left[(x+1)\sqrt{x+1}-x\sqrt{x}\right]+C.$$

f) $$\int\frac{x^3-6x^2-x+4}{x+2}dx=\int\left(x^2-8x+15-\frac{26}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-4x^2+15x-26\,l(x+2)+C.$$

g) $$\int\frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx=\int\left(x+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

h) $$\int\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-1}dx=\int\left(x+2+\frac{3}{x^2-1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2+4x}{2}+\frac{3}{2}l\frac{x-1}{x+1}+C.$$

i) $$\int\cos^2x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{2x+\sin 2x}{4}+C=\frac{x+\sin x\cos x}{2}+C.$$

---

*) Эти два члена можно замѣнить и однимъ, если вмѣсто C напишемъ $\frac{1}{2}l\,C_1$; этотъ одинъ будетъ: $\frac{1}{2}l\frac{C_1(x-1)}{x+1}$.

j) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{2x - \sin 2x}{4} + C = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C.$

k) $\int \cos^3 x\, dx = \int \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} dx = \frac{\sin 3x + 9 \sin x}{12} + C =$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

l) $\int \sin^3 x\, dx = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} dx = \frac{\cos 3x - 9\cos x}{12} + C =$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

m) $\int \cos 5x \cos 2x\, dx = \int \frac{\cos 7x + \cos 3x}{2} dx = \frac{3\sin 7x + 7\sin 3x}{42} + C.$

n) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C = -2 \operatorname{cotg} 2x + C.$$

321. Интегрированіе замѣненіемъ перемѣнной. Преобразуемъ интегралъ $\int f(x)\, dx$ въ другой введеніемъ вмѣсто x новой перемѣнной z. Пусть связь этой новой перемѣнной съ прежней выражается уравненіемъ:

$$\varphi(x) = z;$$

тогда, если ξ есть функція, обратная φ, то:

$$x = \xi(z), \quad dx = \xi'(z)\, dz;$$

слѣдовательно:

$$\int f(x)\, dx = \int f(\xi(z))\, \xi'(z)\, dz.$$

Пусть $F(z)$ такая функція, для которой:

$$F_z'(z) = f(\xi(z))\, \xi'(z);$$

тогда:

$$\int f(x)\, dx = F(z) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Примѣры:

a) $\int \frac{3x^2+6x-2}{(x^3+3x^2-2x+1)^5}\,dx$; $\quad x^3+3x^2-2x+1=z$
$\quad (3x^2+6x-2)\,dx=dz$

$$\int \frac{3x^2+6x-2}{(x^3+3x^2-2x+1)^5}\,dx=\int\frac{dz}{z^5}=-\frac{1}{4z^4}+C.=$$

$$=-\frac{1}{4\,(x^3+3x^2-2x+1)^4}+C.$$

b) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; $\qquad x^2+1=z, \qquad xdx=\frac{1}{2}dz,$

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}lz+C=\frac{1}{2}l\,(x^2+1)+C.$$

c) $\int \cos^3 x dx$; $\qquad \sin x=z, \qquad \cos x\,dx=dz,$

$$\int\cos^3 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int(1-z^2)\,dz=$$

$$=z-\frac{z^3}{3}+C=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

d) $\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx$; $\qquad \sin x=z, \qquad \cos x\,dx=dz,$

$$\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx=\int z^3(1-z^2)\,dz=\int z^3\,dz-\int z^5\,dz=$$

$$=\frac{z^4}{4}-\frac{z^6}{6}+C=\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

e) $\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arc}\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\qquad \operatorname{arc}\sin x=z, \qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dz,$

$$\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arc}\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\sqrt[3]{z}\cdot dz=\frac{3}{4}z\sqrt[3]{z}+C=$$

$$=\frac{3}{4}\operatorname{arc}\sin x\sqrt[3]{\operatorname{arc}\sin x}+C.$$

f) $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; $\quad \sqrt{x^2+1}=z, \quad \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=dz, \quad x^2=z^2-1,$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int(z^2-1)\,dz=\frac{z^3}{3}-z+C=\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1}+C.$$

g) $$\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^3\,dx}{(x^2+1)\sqrt{(\operatorname{arc\,tg} x)^2+1}} = \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2-2}{3}\sqrt{(\operatorname{arc\,tg} x)^2+1}+C.$$

h) $$\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^6 x} = \frac{1}{5\cos^5 x}-\frac{2}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+C=$$

$$=\frac{3-10\cos^2 x+15\cos^4 x}{15\cos^5 x}+C.$$

322. Интегрированіе по частямъ. Пусть p и q функціи x;

$$p\,dq+q\,dp=d\,(pq)$$

$$\int (p\,dq+q\,dp)=\int p\,dq+\int q\,dp=\int d\,(pq)=pq+C.$$

Отсюда, опуская постоянную произвольную и подразумѣвая ее въ интегралахъ, находимъ:

$$\int p\,dq=pq-\int q\,dp.$$

Это — *формула интегрированія по частямъ.* Прочитаемъ ее такъ: *интегралъ произведенія одной функціи на дифференціалъ другой равенъ произведенію этихъ функцій безъ интеграла произведенія другой на дифференціалъ первой.*

Примѣры:

a) $$\int lx\,dx = x\,lx-\int x\,d\,lx = x\,lx-\int dx = x\,lx-x+C.$$

b) $$\int x^3\,lx\,dx=\int lx\cdot d\frac{x^4}{4}=\frac{x^4}{4}\,lx-\int\frac{x^4}{4}\,d\,lx=\frac{x^4}{4}\,lx-\frac{1}{4}\int x^3\,dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}\,lx-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{4}\left(lx-\frac{1}{4}\right)+C.$$

c) $$\int (lx)^2\,dx = x\,(lx)^2-\int x\,d\,[(lx)^2]=x\,(lx)^2-2\int lx\,dx=$$

$$=x\,[(lx)^2-2\,lx+2]+C.$$

d) $$\int x^3\,e^x\,dx=\int x^3\,d\,(e^x)=x^3\,e^x-3\int x^2\,e^x\,dx$$

$$\int x^2\,e^x\,dx=\int x^2\,d\,(e^x)=x^2\,e^x-2\int x e^x\,dx$$

$$\int x\,e^x\,dx = \int x d(e^x) = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C_1.$$

$$\int x^3 e^x\,dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,e^x + C.$$

e) $$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cdot d\sin x = \cos x \sin x - \int \sin x d\cos x =$$

$$= \cos x \sin x + \int \sin^2 x\,dx = \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx =$$

$$= \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x\,dx$$

$$2\int \cos^2 x\,dx = x + \cos x \sin x + C_1$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \cos x \sin x}{2} + C.$$

f) $$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x d\sin x = \cos^2 x \sin x - \int \sin x\,d(\cos^2 x) =$$

$$= \cos^2 x \sin x + 2\int \cos x \sin^2 x\,dx =$$

$$= \cos^2 x \sin x + 2\int \cos x\,dx - 2\int \cos^3 x\,dx$$

$$3\int \cos^3 x\,dx = \cos^2 x \sin x + 2\sin x + C_1$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\cos^2 x \sin x + 2\sin x}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Интегрированіе раціональныхъ дробей.

323. Если степень числителя раціональной дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ выше степени знаменателя, то дробь можно разложить на двѣ части: цѣлую функцію: $\xi(x)$ и дробную: $\frac{f_1(x)}{\varphi(x)}$, при чемъ въ послѣдней степень числителя менѣе степени знаменателя *); тогда:

---

*) Въ случаѣ одинаковыхъ степеней f и φ, цѣлою частью дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ будетъ постоянное число

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \xi(x)\,dx + \int \frac{f_1(x)}{\varphi(x)}\,dx.$$

Первый изъ двухъ послѣднихъ интеграловъ, какъ интегралъ цѣлой функціи, найдется легко; а второй найдемъ, разбивая предварительно дробь $\frac{f_1(x)}{\varphi(x)}$ на простѣйшія, и потомъ интегрируя каждую изъ простѣйшихъ.

Въ №№ 313, 314 и 315 мы видѣли, что всякая раціональная дробь, у которой степень числителя менѣе степени знаменателя, разбивается на простѣйшія дроби такихъ формъ:

$$\frac{A}{(x-a)^k} \text{ и } \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}, \quad \left(\begin{matrix} k \text{ цѣлое положи-} \\ \text{тельное число} \end{matrix}\right);$$

по этому мы проинтегрируемъ всякую раціональную дробь, если въ состояніи интегрировать послѣднія дроби.

Для первой при $k = 1$ имѣемъ:

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \int \frac{dx}{x-a} = A\,l(x-a) + C,$$

а при $k > 1$:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C.$$

Чтобы найти интегралъ второй дроби при $k = 1$, положимъ:

$$x - \alpha = \beta z;$$

тогда:

$$x = \beta z + \alpha, \quad dx = \beta\,dz;$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{A\beta z + A\alpha + B}{z^2+1}\,dz =$$

$$= A\int \frac{z\,dz}{z^2+1} + \frac{A\alpha+B}{\beta}\int \frac{dz}{z^2+1} =$$

$$= \frac{A}{2}\,l(z^2+1) + \frac{A\alpha+B}{\beta}\,\mathrm{arc\,tg}\,z + C.$$

Замѣняя z дробью $\frac{x-\alpha}{\beta}$, и откидывая потомъ постоянный

членъ $-\frac{A}{2}l(\beta^2)$, который можно включить въ постоянную произвольную, получимъ:

$$\int\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{A}{2}l[(x-\alpha)^2+\beta^2]+\frac{A\alpha+B}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta}+C.$$

При $k>1$, полагая опять: $x-\alpha=\beta z$, находимъ:

$$\int\frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}dx=\frac{1}{\beta^{2k-1}}\int\frac{A\beta z+A\alpha+B}{(z^2+1)^k}dz=$$

$$=\frac{A}{\beta^{2k-2}}\int\frac{zdz}{(z^2+1)^k}+\frac{A\alpha+B}{\beta^{2k-1}}\int\frac{dz}{(z^2+1)^k}.$$

Остается найти интегралы: $\int\frac{zdz}{(z^2+1)^k}$ и $\int\frac{dz}{(z^2+1)^k}$. Изъ нихъ первый положеніемъ: $z^2+1=t$ приводится къ $\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^k}$;

но:
$$\int\frac{dt}{t^k}=-\frac{1}{(k-1)t^{k-1}}+C;$$

слѣдовательно:

$$\int\frac{zdz}{(z^2+1)^k}=-\frac{1}{2(k-1)(z^2+1)^{k-1}}+C.$$

Второй приведемъ къ простѣйшему, употребляя слѣдующія преобразованія:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^k}=\int\frac{(z^2+1-z^2)\,dz}{(z^2+1)^k}=\int\frac{dz}{(z^2+1)^{k-1}}-\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^k}.$$

Интегрируя по частямъ выраженіе: $\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^k}$, которому предварительно дадимъ видъ:

$$z\cdot\frac{zdz}{(z^2+1)^k},\ \text{или:}\ -\frac{1}{2(k-1)}z\cdot d\frac{1}{(z^2+1)^{k-1}},$$

получимъ:

$$\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\int zd\frac{1}{(z^2+1)^{k-1}}=$$

$$=-\frac{z}{2(k-1)(z^2+1)^{k-1}}+\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{k-1}};$$

слѣдовательно:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^k}=\int\frac{dz}{(z^2+1)^{k-1}}+\frac{z}{2(k-1)(z^2+1)^{k-1}}-\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{k-1}}=$$

$$=\frac{z}{(2k-2)(z^2+1)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2k-2}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{k-1}}.$$

Итакъ интегралъ $\int\frac{dz}{(z^2+1)^k}$ приведенъ къ простѣйшему, а именно къ интегралу $\int\frac{dz}{(z^2+1)^{k-1}}$; этотъ въ свою очередь приведется къ интегралу $\int\frac{dz}{(z^2+1)^{k-2}}$, и т. д. Постепеннымъ пониженіемъ показателя k мы наконецъ приведемъ интегралъ къ $\int\frac{dz}{z^2+1}$, который извѣстенъ. Подставляя въ послѣднюю формулу вмѣсто k послѣдовательно числа 2, 3, 4, . . ., получимъ:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z+C$$

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^3}=\frac{z}{4(z^2+1)^2}+\frac{3z}{8(z^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} z+C$$

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^4}=\frac{z}{6(z^2+1)^3}+\frac{5z}{24(z^2+1)^2}+\frac{5z}{16(z^2+1)}+\frac{5}{16}\operatorname{arc\,tg} z+C$$

и т. д.

Примѣры:

a) Найти интегралъ $\int\frac{6x^4+14x^3-35x^2+21x-4}{x^2+3x-4}dx$.

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+14x^3-35x^2+21x-4 & x^2+3x-4 \\ \underline{6x^4+18x^3-24x^2} & \overline{6x^2-4x+1} \\ \quad -4x^3-11x^2+21x & \\ \quad \underline{-4x^3-12x^2+16x} & \\ \qquad\quad x^2+5x-4 & \\ \qquad\quad \underline{x^2+3x-4} & \\ \qquad\qquad 2x & \end{array}$$

$$\frac{2x}{x^2+3x-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}$$

$$A=\frac{2}{5},\quad B=\frac{8}{5}.$$

$$\int\frac{6x^4+14x^3-35x^2+21x-4}{x^2+3x-4}dx=\int(6x^2-4x+1)dx+\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{8}{5}\int\frac{dx}{x+4}=$$

$$=2x^3-2x^2+x+\frac{2}{5}l(x-1)+\frac{8}{5}l(x+4)+C.$$

b) $$\int \frac{2x^2 - 11x - 25}{x^3 - 7x - 6}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3}\right) dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+2} - 2\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= 3\,l\,(x+1) + l\,(x+2) - 2\,l\,(x-3) + C.$$

c) $$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 - 1}\,dx = \int \left[\frac{3}{4\,(x-1)} + \frac{1}{4\,(x+1)} - \frac{1}{2\,(x^2+1)}\right] dx =$$

$$= \frac{3}{4}\,l\,(x-1) + \frac{1}{4}\,l\,(x+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

d) $$\int \frac{x^4 - x^2 + 2x + 1}{x^6 - 2x^4 + x^3 - 2x}\,dx =$$

$$= \int \left[-\frac{1}{2x} - \frac{1}{3\,(x+1)} + \frac{5+4\sqrt{2}}{28\,(x-\sqrt{2})} + \frac{5-4\sqrt{2}}{28\,(x+\sqrt{2})} + \frac{2\,(5x-4)}{21\,(x^2-x+1)}\right] dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,lx - \frac{1}{3}\,l(x+1) + \frac{5+4\sqrt{2}}{28}\,l\left(x-\sqrt{2}\right) + \frac{5-4\sqrt{2}}{28}\,l\left(x+\sqrt{2}\right) +$$

$$+ \frac{2}{21}\int \frac{5x-4}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx, \quad x - \frac{1}{2} = \frac{z\sqrt{3}}{2}, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dz,$$

$$\int \frac{5x-4}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{5z-\sqrt{3}}{z^2+1}\,dz = \frac{5}{2}\,l(z^2+1) - \sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg} z + C_1 =$$

$$= \frac{5}{2}\,l\,(x^2 - x + 1) - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_{11}.$$

$$\int \frac{x^4 - x^2 + 2x + 1}{x^6 - 2x^4 + x^3 - 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\,lx - \frac{1}{3}\,l\,(x+1) + \frac{5}{28}\,l\,(x^2-2) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{7}\cdot l\,\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + \frac{5}{21}\,l(x^2 - x + 1) - \frac{2}{7\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

e) $$\int \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 1}{x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x}\,dx =$$

$$= \int \left[\frac{2}{3(x-1)^4} - \frac{1}{9(x-1)^3} + \frac{1}{27(x-1)^2} + \frac{53}{81(x-1)} - \frac{25}{162(x+2)} - \frac{1}{2x}\right] dx =$$

$$= -\frac{2}{9(x-1)^3} + \frac{1}{18(x-1)^2} - \frac{1}{27(x-1)} + \frac{53}{81}\,l\,(x-1) - \frac{25}{162}\,l\,(x+2) - \frac{1}{2}\,l\,x + C.$$

f) $\int \frac{x^4+2x^3-x-1}{8x^5+20x^4+2x^3-17x^2-11x-2}\,dx = \frac{1}{81}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{81}\int\frac{dx}{x+2}+$

$$+\frac{11}{36}\int\frac{dx}{(2x+1)^3}+\frac{65}{324}\int\frac{dx}{2x+1}=$$

$$=\frac{1}{81}\,l\,(x^2+x-2)-\frac{11}{144\,(2x+1)^2}+\frac{65}{648}\,l\,(2x+1)+C.$$

g) $\int\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^5+6x^4+9x^3}\,dx=-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x}-\frac{3}{x+3}+l(x+3)+C=$

$$=\frac{x^2+9x-9}{x^3+3x^2}+l(x+3)+C.$$

h) $\int\frac{2x^7-2x^6+13x^5+9x^4+4x^3-10x^2+8x+8}{x^8-2x^7-6x^6+8x^5+12x^4-8x^3-8x^2}\,dx=\frac{3x^2+2x-3}{4\,(x^3-2x)}+$

$$+\frac{1}{2}\,l\,(x^4-2x^3-4x^2+4x+4)+\frac{3}{8\sqrt{2}}\,l\,\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,l\,\frac{x-1-\sqrt{3}}{x-1+\sqrt{3}}+C.$$

i) $\int\frac{x^3-2x+2}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}\,dx=\int\left[\frac{4x-7}{5(x^2+1)^2}-\frac{6x-13}{25\,(x^2+1)}+\frac{6}{25\,(x-2)}\right]dx=$

$$=\frac{4}{5}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}-\frac{6}{25}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{13}{25}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{6}{25}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=-\frac{2}{5(x^2+1)}-\frac{7}{5}\left[\frac{x}{2\,(x^2+1)}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x\right]-\frac{3}{25}\,l\,(x^2+1)+$$

$$+\frac{13}{25}\,\mathrm{arc\,tg}\,x+\frac{6}{25}\,l\,(x-2)+C=$$

$$=-\frac{7x+4}{10(x^2+1)}-\frac{9}{50}\,\mathrm{arc\,tg}\,x+\frac{3}{25}\,l\,\frac{(x-2)^2}{x^2+1}+C.$$

j) $\int\frac{x^7-5x^6-6x^5+31x^4-80x^3+92x^2-80x+32}{x^8-4x^7+12x^6-24x^5+36x^4-32x^3+16x^2}\,dx=$

$$=-\frac{2}{x}-\frac{x-3}{2(x^2-2x+2)}+\frac{3}{2}\,l\,(x^2+4)-lx-\frac{1}{2}\,l\,(x^2-2x+2)+$$

$$+\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{2}-\frac{9}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,(x-1)+C.$$

324. **Интегралъ** $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, **когда корни функціи** ax^2+bx+c **мнимые,** т. е. когда $4ac-b^2>0$, можно, не вводя новой перемѣнной, найти слѣдующимъ образомъ:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} + \frac{2aB-Ab}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = l(ax^2+bx+c)+C_1,$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{4a\,dx}{4a^2x^2+4abx+4ac} = \int \frac{4a\,dx}{(2ax+b)^2+4ac-b^2} =$$

$$= 2\int \frac{d\,(2ax+b)}{(2ax+b)^2+h^2} = \frac{2}{h}\int \frac{d\,\frac{2ax+b}{h}}{\left(\frac{2ax+b}{h}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{h}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{h} + C_{11}\left(h=\sqrt{4ac-b^2}\right).$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}l(ax^2+bx+c) + \frac{2aB-Ab}{ah}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{h} + C.$$

Въ интегралъ этотъ входятъ функціи логариѳмическая и круговая: первая есть *Неперовъ логариѳмъ знаменателя подъинтегральной функціи*, а вторая — *арктангенсъ производной знаменателя, раздѣленной на h*. Коэффиціентъ при логариѳмѣ равенъ *половинѣ отношенія коэффиціента при x въ числителѣ подъинтегральной функціи къ коэффиціенту при x^2 въ знаменателѣ;* коэффиціентъ же при арктангенсѣ можно получить такъ: *взять производную знаменателя подъинтегральной функціи, найти ея корень, подставить этотъ корень вмѣсто x въ числитель, полученный результатъ удвоить и раздѣлить на h.*

Примѣры:

а) Найти $\int \frac{5x-2}{2x^2-3x+4}dx.$

$$h = \sqrt{4ac - b^2} = \sqrt{23}\,,\quad (2x^2 - 3x + 4)' = 4x - 3\,,$$

корень $(4x - 3)$ есть $\frac{3}{4}$, $\left(5x - 2\right)_{x=\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}$

$$\int \frac{5x-2}{2x^2-3x+4}\,dx = \frac{5}{4}\,l\,(2x^2 - 3x + 4) + \frac{7}{2\sqrt{23}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-3}{\sqrt{23}} + C.$$

b) $\int \frac{3x+2}{x^2+3x+4}\,dx = \frac{3}{2}\,l\,(x^2 + 3x + 4) - \frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C.$

c) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 8x + 4}\,dx = \frac{5}{8\,(x+1)} + \frac{15}{32}\,l\,(x+1) -$

$$- \frac{3}{16}\,l\,(x^2 + x + 2) - \frac{3}{64}\,l\,(x^2 - x + 2) + \frac{19}{8\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} -$$

$$- \frac{15}{32\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$$

325. При интегрированіи раціональныхъ дробей не слѣдуетъ всегда предварительно разлагать ихъ на простѣйшія дроби; иногда при удачномъ выборѣ новой перемѣнной, или при посредствѣ формулы интегрированія по частямъ, вопросъ разрѣшается удобнѣе. Въ иныхъ случаяхъ введеніемъ новой перемѣнной можно предварительно упростить подъинтегральную функцію и затѣмъ уже разлагать ее на простѣйшія.

Примѣры:

a) $\int \frac{5x^4 - 4x + 1}{x^5 - 2x^2 + x - 1}\,dx = l\,(x^5 - 2x^2 + x - 1) + C.$

b) $\int \frac{5x^4 - 4x + 1}{(x^5 - 2x^2 + x - 1)^3}\,dx = -\frac{1}{2\,(x^5 - 2x^2 + x - 1)^2} + C.$

c) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2} = \operatorname{arc\,tg}(x^2 + x + 1) + C.$

d) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{3}} + C.$

e) $\int \frac{x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 4x + 3)^2}\,dx = \int \frac{(x+2)^2\,dx}{[(x+2)^2 - 1]^2} = \int \frac{z^2\,dz}{(z^2 - 1)^2} =$ *)

*) Буквою z обозначено $x + 2$.

$$= -\frac{1}{2}\int z\,d\,\frac{1}{z^2-1} = -\frac{z}{2(z^2-1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-1} =$$

$$= -\frac{x+2}{2(x^2+4x+3)} + \frac{1}{4}\,l\,\frac{x+1}{x+3} + C.$$

f) $$\int\frac{x^3+2x}{x^4-3x^2+2}\,dx = 2\,l\,(x^2-2) - \frac{3}{2}\,l\,(x^2-1) + C.$$

g) $$\int\frac{x^5\,dx}{x^6+x^3-2} = \frac{1}{9}[l\,(x^3-1) + 2\,l\,(x^3+2)] + C.$$

h) $$\int\frac{x^5\,dx}{x^6+x^3+2} = \frac{1}{6}\,l\,(x^6+x^3+2) - \frac{1}{3\sqrt{7}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x^3+1}{\sqrt{7}} + C.$$

i) $$\int\frac{(3x^2+1)\,dx}{x^9+3x^7+3x^6+3x^5+6x^4+4x^3+3x^2+3x+2} = \int\frac{d\,(x^3+x+1)}{(x^3+x+1)^3+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\,l\,(x^3+x+2) - \frac{1}{6}\,l\,(x^6+2x^4+x^3+x^2+x+1) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x^3+2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

j) $$\int\frac{x^m\,dx}{(x^2+a)^n} = \int x^{m-1}\frac{x\,dx}{(x^2+a)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\int x^{m-1}\,d\,\frac{1}{(x^2+a)^{n-1}} =$$

$$= -\frac{x^{m-1}}{2(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{m-1}{2(n-1)}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2+a)^{n-1}}.$$

Если m нечетное число, то положенiемъ: $x^2+a=z$, мы приведемъ интегралъ къ интегралу дроби съ одночленнымъ знаменателемъ:

$$\int\frac{x^{2k+1}\,dx}{(x^2+a)^n} = \frac{1}{2}\int\frac{(z-a)^k}{z^n}\,dz.$$

326. Способъ Остроградскаго. Не трудно видѣть, что если знаменатель рацiональной дроби не имѣетъ кратныхъ корней, то интегралъ ея не содержитъ въ себѣ алгебрической части, а состоитъ только изъ логариѳмическихъ и круговыхъ функцiй. Если же знаменатель имѣетъ кратные корни, то въ составъ интеграла входитъ и алгебрическая часть. Соединяя всѣ члены алгебрической части въ одинъ, мы получимъ такую рацiональную дробь, у которой знаменатель будетъ произведенiе всѣхъ кратныхъ множителей знаменателя

подъинтегральной функціи со степенью кратности на единицу меньшею; другими словами: если знаменатель подъинтегральной функціи есть:

$$P_1 P_2^2 P_3^3 P_4^4 P_5^5 \ldots\ldots,$$

гдѣ P_1 — произведеніе одиночныхъ множителей, P_2 — двойныхъ, P_3 — тройныхъ, и т. д., то знаменатель алгебрической части интеграла будетъ:

$$P_2 P_3^2 P_4^3 P_5^4 \ldots\ldots,$$

и тогда трансцендентную часть интеграла можно разсматривать, какъ интегралъ раціональной дроби, имѣющей знаменателемъ произведеніе:

$$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 \ldots\ldots,$$

котораго всѣ корни одиночные.

Найдемъ алгебрическую часть интеграла, не разбивая подъинтегральной функціи на частныя дроби, и затѣмъ ту дробь, интегралъ которой даетъ трансцендентную часть. Пусть эти искомыя:

$$\frac{X}{Y} \text{ и } \frac{Z}{S},$$

а данная для интегрированія дробь пусть будетъ: $\frac{M}{N}$, такъ что:

$$\int \frac{M}{N} dx = \frac{X}{Y} + \int \frac{Z}{S} dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Здѣсь:

$$N = P_1 P_2^2 P_3^3 P_4^4 P_5^5 \ldots\ldots$$

$$Y = P_2 P_3^2 P_4^3 P_5^4 \ldots\ldots$$

$$S = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 \ldots\ldots = \frac{N}{Y}.$$

Y есть общій наибольшій дѣлитель между N и производною N, а S частное отъ раздѣленія N на Y.

Степень M менѣе степени N; поэтому и степень Z менѣе степени

S, и степень X можемъ считать менѣе степени Y *). Чтобы опредѣлить X и Z, продифференцируемъ (a); получимъ:

$$\frac{M}{N} = \frac{X'Y - Y'X}{Y^2} + \frac{Z}{S}.$$

Обозначимъ общій наибольшій дѣлитель между Y и Y' чрезъ Y_1, а частныя: $\frac{Y}{Y_1}$ и $\frac{Y'}{Y_1}$ чрезъ S_1 и T_1; тогда:

$$Y_1 = P_3 P_4^2 P_5^3 \dots \qquad Y = S_1 Y_1$$

$$S_1 = P_2 P_3 P_4 P_5 \dots \qquad Y' = T_1 Y_1$$

$$S = P_1 S_1$$

$$\frac{M}{N} = \frac{S_1 Y_1 X' - X T_1 Y_1}{Y S_1 Y_1} + \frac{Z}{S} = \frac{S_1 X' - X T_1}{Y S_1} + \frac{Z}{S}.$$

Послѣднія двѣ дроби приводятся къ знаменателю N, если въ числитель и знаменатель первой изъ нихъ введемъ множитель P_1, а въ числитель и знаменатель второй — множитель Y; по этому:

$$\frac{M}{N} = \frac{P_1 S_1 X' - X T_1 P_1 + Z Y}{N};$$

слѣдовательно:

$$M = P_1 S_1 X' - X T_1 P_1 + Z Y =$$

$$= S X' - X T_1 P_1 + Z Y.$$

Дифференцируя: $N = SY$, и обозначая частное отъ раздѣленія N' на Y чрезъ T, получимъ:

$$N' = YS' + SY' = TY,$$

или:

$$YS' + YT_1 P_1 = TY,$$

*) Если-бы взяли степень X равною степени Y, то цѣлая часть дроби $\frac{X}{Y}$ была-бы постояннымъ числомъ, которое можно включить въ постоянную произвольную.

откуда:

$$T_1 P_1 = T - S'.$$

Слѣдовательно:

$$M = SX' + XS' - TX + ZY,$$

или:

$$M = (SX)' - TX + ZY \dots\dots\dots\dots\dots (b)$$

Это равенство даетъ намъ возможность опредѣлить разомъ X и Z по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Пусть n и k показатели степеней цѣлыхъ функцій N и Y; тогда цѣлыя функціи S и T будутъ первая $(n-k)^{ой}$ степени, а вторая $(n-k-1)^{ой}$; цѣлая функція X будетъ не выше $(k-1)^{ой}$ степени, а Z не выше $(n-k-1)^{ой}$; лѣвая и правая части (b) не выше $(n-1)^{ой}$ степени. Полагая:

$$X = \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + \dots + \alpha_{k-2} x^2 + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$$

$$Z = \beta_1 x^{n-k-1} + \beta_2 x^{n-k-2} + \dots + \beta_{n-k-2} x^2 + \beta_{n-k-1} x + \beta_{n-k},$$

затѣмъ подставляя эти выраженія въ (b), и сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x съ лѣвой и правой стороны, мы получимъ n уравненій первой степени съ n неизвѣстными: α_1, α_2, ..., α_k, β_1, β_2, ..., β_{n-k}, откуда эти послѣднія и найдутся.

Можно поступить и иначе: изъ (b) имѣемъ:

$$Z = \frac{M + TX - (SX)'}{Y} \dots\dots\dots\dots\dots (c)$$

Полагая: $X = \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$, и подставляя это въ выраженіе

$$M + TX - (SX)',$$

будемъ дѣлить послѣднее на Y. Такъ какъ Y цѣлая функція k-ой степени, то остатокъ отъ этого дѣленія будетъ вида:

$$A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} + \dots + A_{k-1} x + A_k,$$

и такъ какъ дѣленіе должно совершиться на цѣло, то:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots, \quad A_{k-1} = 0, \quad A_k = 0.$$

Изъ этихъ k уравненій найдемъ k неизвѣстныхъ: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$; а подставляя ихъ въ коэффиціенты частнаго, получимъ и Z.

И такъ: чтобы получить алгебрическую часть интеграла $\int \frac{M}{N} dx$, ищемъ общій наибольшій дѣлитель Y между N и производною N'; затѣмъ составляемъ частныя:

$$\frac{N}{Y} = S, \qquad \frac{N'}{Y} = T,$$

и съ помощію равенства (b) или (c), по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, находимъ X и Z; тогда алгебрическая часть интеграла будетъ $\frac{X}{Y}$, а трансцендентная найдется интегрированіемъ выраженія $\frac{Z}{S} dx$.

Дробь $\frac{Z}{S}$ можетъ сокращаться въ частныхъ случаяхъ.

Если $Z = 0$, то интегралъ не имѣетъ трансцендентной части. Если функціи N и N' не имѣютъ общаго дѣлителя, то интегралъ не имѣетъ алгебрической части.

Примѣры:

а) Найти: $$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^5 - 2x^4 + x^3} dx.$$

$$\left.\begin{aligned} N &= x^5 - 2x^4 + x^3 = x^3(x-1)^2 \\ N' &= 3x^2(x-1)^2 + 2x^3(x-1) = x^2(x-1)(5x-3) \end{aligned}\right\} Y = x^2(x-1) = x^3 - x^2$$

$$\frac{N}{Y} = S = x(x-1) = x^2 - x$$

$$\frac{N'}{Y} = T = 5x - 3$$

$$X = ax^2 + bx + c$$

$$SX = (x^2 - x)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b)x^2 - cx$$

$$(SX)' = 4ax^3 + 3(b-a)x^2 + 2(c-b)x - c$$

$$TX = (5x-3)(ax^2+bx+c) = 5ax^3 + (5b-3a)x^2 + (5c-3b)x - 3c$$

$$M + TX - (SX)' = ax^3 + (2b+1)x^2 + (3c-b+1)x + 1 - 2c$$

$$\begin{array}{l|l} ax^3 + (2b+1)x^2 + (3c-b+1)x + 1 - 2c & x^3 - x^2 \\ \cline{2-2} ax^3 - ax^2 & a \\ \cline{1-1} \quad (a+2b+1)x^2 + (3c-b+1)x + 1 - 2c = 0 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} a + 2b + 1 = 0 \\ 3c - b + 1 = 0 \\ 1 - 2c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \frac{5}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{array} \left| \begin{array}{l} X = -\dfrac{12x^2 - 5x - 1}{2} \\ Z = a = -6 \end{array}\right.$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,dx = -\frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)} - 6\int\frac{dx}{x(x-1)} = -\frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)} +$$

$$+ 6l\,\frac{x}{x-1} + C.$$

b) Найти $\int \frac{x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 2x}{(x^3+x+1)^2}\,dx.$

$$M = x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 2x, \quad \left.\begin{array}{l} N = (x^3+x+1)^2 \\ N' = 2(x^3+x+1)(3x^2+1) \end{array}\right\} Y = x^3 + x + 1$$

$$\frac{N}{Y} = S = x^3 + x + 1, \quad \frac{N'}{Y} = T = 6x^2 + 2$$

$$X = ax^2 + bx + c, \quad SX = ax^5 + bx^4 + (a+c)x^3 +$$

$$+ (a+b)x^2 + (b+c)x + c,$$

$$(SX)' = 5ax^4 + 4bx^3 + 3(a+c)x^2 + 2(a+b)x + b + c$$

$$TX = 6ax^4 + 6bx^3 + (2a+6c)x^2 + 2bx + 2c$$

$$M + TX - (SX)' = (a+1)x^4 + (2b-4)x^3 + (3c-a-7)x^2 -$$

$$-(2a+2)x + c - b$$

$$\begin{array}{l|l}
(a+1)x^4+(2b-4)x^3+(3c-a-7)x^2-(2a+2)x+c-b & x^3+x+1 \\
\hline
(a+1)x^4 \qquad +(a+1)x^2+(a+1)x & (a+1)x+2b-4 \\
\hline
(2b-4)x^3+(3c-2a-8)x^2-(3a+3)x+c-b & \\
(2b-4)x^3 \qquad +(2b-4)x+2b-4 & \\
\hline
(3c-2a-8)x^2-(3a+2b-1)x+c-3b+4=0 &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}
3c-2a-8=0 \\
3a+2b-1=0 \\
c-3b+4=0
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
a=-1 \\
b=2 \\
c=2
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{r}
a+1=0 \\
2b-4=0
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{l}
X=-(x^2-2x-2) \\
Z=0
\end{array}$$

$$\int\frac{x^4-4x^3-7x^2-2x}{(x^3+x+1)^2}dx=-\frac{x^2-2x-2}{x^3+x+1}+C.$$

c) Найти $\int\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^5+6x^4+9x^3}dx$ (примѣръ g n^0 323).

$$M=x^4+2x^3-18x^2+54,\quad \left.\begin{array}{l}
N=x^5+6x^4+9x^3=x^3(x+3)^2 \\
N'=x^2(x+3)(5x+9)
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
Y=x^2(x+3)= \\
\quad =x^3+3x^2
\end{array}$$

$$S=x(x+3)=x^2+3x,\quad T=5x+9,\quad X=ax^2+bx+c,$$

$$M+TX-(SX)'=x^4+(a+2)x^3+(2b-18)x^2+$$
$$+(3b+3c)x+6c+54$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4+(a+2)x^3+(2b-18)x^2+(3b+3c)x+6c+54 & x^3+3x^2 \\
\cline{2-2}
x^4+3x^3 & x+a-1 \\
\hline
(a-1)x^3+(2b-18)x^2 & \\
(a-1)x^3+(3a-3)x^2 & \\
\hline
(2b-3a-15)x^2+(3b+3c)x+6c+54=0 &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}
2b-3a-15=0 \\
3b+3c=0 \\
6c+54=0
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
a=1 \\
b=9 \\
c=-9
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{l}
X=x^2+9x-9 \\
Z=x+a-1=x \\
\frac{Z}{S}=\frac{x}{x(x+3)}=\frac{1}{x+3}
\end{array}$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^5+6x^4+9x^3}\,dx = \frac{x^2+9x-9}{x^3+3x^2} + \int \frac{dx}{x+3} = \frac{x^2+9x-9}{x^3+3x^2} + l(x+3) + C.$$

d) $$\int \frac{2x^{10}+x^9+8x^8-8x^7+14x^6+9x^5+56x^4+35x^3+28x^2-3x+6}{x(x^2+1)^3(x^2+x+2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^4+2x^3+x^2-4x-1}{(x^2+1)^2(x^2+x+2)} + 2\,lx - 3\,\text{arc tg}\,x + C.$$

Интегралы ирраціональныхъ функцій.

327. Интегралы:

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{x^m}, \quad \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \quad \sqrt[n_{11}]{x^{m_{11}}}, \ldots\right)dx,$$

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{Ax+B}{ax+b}\right)^m}, \quad \sqrt[n_1]{\left(\frac{Ax+B}{ax+b}\right)^{m_1}}, \ldots\right)dx,$$

въ которыхъ f означаетъ раціональныя дѣйствія, замѣненіемъ перемѣнной приводятся къ интеграламъ раціональныхъ функцій. Чтобы достигнуть этого, примемъ за новую перемѣнную $\sqrt[k]{x}$ для перваго интеграла, и $\sqrt[k]{\frac{Ax+B}{ax+b}}$ для втораго (k наименьшее кратное показателей n, n_1, n_{11}, ...); тогда подъинтегральная функція преобразуется, и въ новой перемѣнной будетъ раціональною.

Примѣры:

a) $$\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}\right) + \frac{3}{4}\,l\left(1+2\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(2x+3)^3} + \sqrt[3]{(2x+3)^2} - 2\sqrt{2x+3}} = 2\sqrt[4]{2x+3} - 3\sqrt[6]{2x+3} +$$

$$+ 6\sqrt[12]{2x+3} + \frac{6}{5}\,l\left(\sqrt[12]{2x+3} - 1\right) + \frac{12}{5}\,l\left(2 + \sqrt[6]{2x+3} + 2\sqrt[12]{2x+3}\right) -$$

$$- \frac{72}{5}\,\text{arc tg}\left(1 + \sqrt[12]{2x+3}\right) + C.$$

328. Чтобы привесть интегралъ

$$\int f\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \quad \left(\begin{matrix} f \text{ означаетъ раціо-} \\ \text{нальныя дѣйствія.} \end{matrix}\right)$$

къ интегралу раціональной функціи, постараемся перемѣнную x такъ связать съ новой перемѣнной z, чтобы и x, и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ выразились въ z раціональнымъ образомъ:

Первый пріемъ:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a}, \quad z=x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+bx+c},$$

$$ax^2+bx+c=z^2-2xz\sqrt{a}+ax^2$$

$$bx+c=z^2-2xz\sqrt{a}.$$

Второй пріемъ:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz-\sqrt{c}, \quad z=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}{x}$$

$$ax^2+bx+c=x^2z^2-2xz\sqrt{c}+c$$

$$ax+b=xz^2-2z\sqrt{c}.$$

Третій пріемъ:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)z, \qquad x_1 \text{ и } x_{11} \text{ корни } ax^2+bx+c$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_{11}) \quad z=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}=\sqrt{\frac{a(x-x_{11})}{x-x_1}}$$

$$=(x-x_1)^2z^2$$

$$a(x-x_{11})=(x-x_1)z^2.$$

Каждый изъ этихъ пріемовъ приводитъ къ уравненію первой степени относительно x, изъ котораго, стало-быть, x выразится раціонально въ z; а затѣмъ раціонально въ z выразимъ и dx, и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, а слѣдовательно и $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

Если коэффиціенты a, b и c, а также коэффиціенты функціи f, вещественные, и мы при интегрированіи не желаемъ вводить мнимыхъ выраженій, то первый пріемъ будемъ употреблять, когда $a > 0$, второй — когда $c > 0$, третій — когда корни x_1 и x_{11} функціи $ax^2 + bx + c$ вещественные. Если же коэффиціенты a и c оба отрицательные, и при этомъ корни функціи $ax^2 + bx + c$ мнимые, то мнимости при интегрированіи не избѣжимъ; да и нѣтъ надобности въ этомъ, потому что тогда корень $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ будетъ мнимымъ при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ x. Конечно, не слѣдуетъ всегда держаться этихъ общихъ пріемовъ при интегрированія, — пріемовъ, помощію которыхъ мы сразу преобразовываемъ подъинтегральную функцію въ раціональную. Во многихъ случаяхъ это преобразованіе приводитъ къ очень сложной раціональной функціи, между тѣмъ какъ при посредствѣ другихъ соображеній интегралъ получается проще. Въ иныхъ случаяхъ бываетъ удобнѣе преобразовать интегралъ въ другой простѣйшій, въ которомъ подъинтегральная функція, какъ и въ данномъ, остается радикальною, и потомъ уже этотъ простѣйшій привесть къ интегралу раціональной функціи. Для поясненія приведемъ примѣръ. Найдемъ интегралъ:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}.$$

Употребимъ сначала первый пріемъ; для этого положимъ:

$$\sqrt{4x^2 + 2x - 2} = z - 2x;$$

тогда:

$$z = 2x + \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

$$2x - 2 = z^2 - 4xz, \quad dx = zdz - 2z\,dx - 2x\,dz,$$

$$x = \frac{z^2 + 2}{2(2z + 1)}, \qquad dx = \frac{(z - 2x)\,dz}{2z + 1},$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{1}{2}\int \frac{z^2 + 2}{(2z + 1)^2}\,dz.$$

Положеніе: $2z + 1 = t$, откуда: $dz = \frac{1}{2}dt$, доставитъ:

$$\frac{1}{2}\int\frac{z^2+2}{(2z+1)^2}\,dz=\frac{1}{16}\int\frac{t^2-2t+9}{t^2}\,dt=\frac{1}{16}\int\left(1-\frac{2}{t}+\frac{9}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{16}\left(t-2lt-\frac{9}{t}\right)+C=\frac{t^2-9}{16t}-\frac{1}{8}lt+C$$

$$=\frac{z^2+z-2}{4(2z+1)}-\frac{1}{8}l(2z+1)+C$$

$$=\frac{8x^2+4x-4+(4x+1)\sqrt{4x^2+2x-2}}{4(4x+1+2\sqrt{4x^2+2x-2})}-\frac{1}{8}l\left(4x+1+2\sqrt{4x^3+2x-2}\right)+C.$$

Алгебрическая часть интеграла, по сокращеніи, приводится къ: $\frac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{4}$; слѣдовательно:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{1}{4}\sqrt{4x^3+2x-2}-\frac{1}{8}l\left(4x+1+2\sqrt{4x^2+2x-2}\right)+C.$$

Теперь поступимъ иначе: въ числителѣ подъинтегральной функціи вмѣсто x напишемъ производную подрадикальной функціи, т. е. $8x+2$, и затѣмъ дополнимъ его слагаемымъ и множителемъ такими, чтобы интегралъ сохранилъ свое значеніе; тогда получимъ:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+2x-2}}=\int\frac{\frac{1}{8}(8x+2-2)\,dx}{\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{1}{4}\int\frac{(8x+2)\,dx}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x-2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+2x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x-2}}.$$

Примѣняя теперь къ интегралу $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x-2}}$ положеніе: $\sqrt{4x^2+2x-2}=z-2x$, будемъ имѣть:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x-2}}=\int\frac{dz}{2z+1}=\frac{1}{2}l(2z+1)+C_1=$$

$$=\frac{1}{2}l\left(4x+1+2\sqrt{4x^2+2x-2}\right)+C_1.$$

Слѣдовательно:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+2x-2}-$$

$$-\frac{1}{8}l\left(4x+1+2\sqrt{4x^3+2x-2}\right)+C.$$

329. Интегралъ: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Въ случаѣ $a>0$ положимъ: $\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a}$; тогда:

$$bx+c=z^2-2xz\sqrt{a},\quad bdx=2z\,dz-2z\sqrt{a}\cdot dx-2x\sqrt{a}\cdot dz,$$

$$\left(2z\sqrt{a}+b\right)dx=2\left(z-x\sqrt{a}\right)dz,\quad \frac{dx}{z-x\sqrt{a}}=\frac{2dz}{2z\sqrt{a}+b}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{2\sqrt{a}\,.\,dz}{2z\sqrt{a}+b}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,l(2z\sqrt{a}+b)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(2ax+b+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+C.$$

Подъ знакомъ логариѳма можно ввести $2\sqrt{a}$ дѣлителемъ; въ интегралъ тогда войдетъ постоянный членъ $-\frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,(2\sqrt{a})$, который можемъ включить въ постоянную произвольную; по этому найденный результатъ можно представить и подъ видомъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+C_1.$$

Первый членъ второй части прочитаемъ такъ: *произведеніе* $\frac{1}{\sqrt{a}}$ *на Неперовъ логариѳмъ отношенія производной подрадикальной функціи къ* $2\sqrt{a}$*, сложеннаго съ радикаломъ.*

Въ случаѣ: $a<0$, предполагая однако, что корни функціи ax^2+bx+c вещественные, и стало быть $b^2-4ac>0$, употребимъ другой пріемъ. Примемъ производную функціи ax^2+bx+c за новую перемѣнную, т. е. положимъ:

$$2ax+b=z;$$

тогда:

$$x=\frac{z-b}{2a},\quad dx=\frac{dz}{2a},\quad ax^2+bx+c=\frac{1}{4}\left(\frac{4ac\quad b^2}{\text{[redacted]}}+\frac{z^2}{a}\right).$$

Такъ какъ: $a<0$, $4ac-b^2<0$, то $\frac{4ac-b^2}{a}>0$, $\frac{1}{a}<0$; положимъ: $\frac{4ac-b^2}{a}=\alpha^2$, $-\frac{1}{a}=\beta^2$; тогда:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2z^2},\quad dx=-\frac{1}{2}\beta^2\,dz$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{\beta^2\,dz}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2z^2}}=-\beta\int\frac{d\,\frac{\beta z}{\alpha}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta z}{\alpha}\right)^2}}=$$

$$=\beta\arccos\frac{\beta z}{\alpha}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arccos\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

Прочитаемъ первый членъ второй части такъ: *произведенiе* $\frac{1}{\sqrt{-a}}$ *на арккосинусъ отношенiя производной подрадикальной функцiи къ* $\sqrt{b^2-4ac}$. Вмѣсто арккосинуса можно ввести арксинусъ, и тогда послѣдняя формула представится подъ видомъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C_1.$$

Въ случаѣ $a<0$ и мнимости корней функцiи ax^2+bx+c, радикалъ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ принимаетъ только мнимыя значенiя; а поэтому и интегралъ представится въ мнимой формѣ. Поставимъ на видъ знакъ коэффицiента a, т. е. напишемъ $-a_1$ вмѣсто a; тогда a_1 будетъ число положительное, — и мы получимъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-a_1x^2+bx+c}}=\frac{1}{i}\int\frac{dx}{\sqrt{a_1x^2-bx-c}}=$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{a_1}}l\left(\frac{2a_1x-b}{2\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_1x^2-bx-c}\right)+C.$$

Примѣры:

a) $$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-7x+4}}=\frac{1}{3}l\left(\frac{18x-7}{6}+\sqrt{9x^2-7x+4}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}l\left(18x-7+6\sqrt{9x^2-7x+4}\right)+C_1.$$

b) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+8x-4x^2}}=\frac{1}{2}\arccos\frac{3-8x}{5}+C.$$

c) $$\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}=\arcsin\frac{3+2x}{5}+C.$$

d) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+6x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{2x-3}{\sqrt{3}}.$$

330. Интегралъ: $$\int \sqrt{ax^2+bx+c} \cdot dx.$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} \cdot dx = \int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} \cdot dx = x\sqrt{ax^2+bx+c} - \int \frac{x(2ax+b)\,dx}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$2\int \sqrt{ax^2+bx+c} \cdot dx = x\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{bx+2c}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

$$= x\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{(2ax+b)\frac{b}{2a}+2c-\frac{b^2}{2a}}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

$$= x\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{4ac-b^2}{4a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= x\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{2a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{4a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Часть интеграла $\int \sqrt{ax^2+bx+c} \cdot dx$, какъ видимъ, алгебрическая функція, а другая часть — трансцендентная, и именно логариѳмическая или круговая, смотря по коэффиціентамъ a, b и c.

Примѣръ:

$$\int \sqrt{-2x^2+3x-1} \cdot dx = \frac{4x-3}{8}\sqrt{-2x^2+3x-1} + \frac{\arcsin(4x-3)}{16\sqrt{2}} + C.$$

331. Интегралъ: $$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+c}}.$$

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{1}{a}\int x^{n-1}\,d\sqrt{ax^2+c} = \frac{x^{n-1}}{a}\sqrt{ax^2+c} -$$

$$- \frac{n-1}{a}\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+c} \cdot dx$$

$$=\frac{x^{n-1}}{a}\sqrt{ax^2+c}-\frac{n-1}{a}\int\frac{(ax^2+c)\,x^{n-2}}{\sqrt{ax^2+c}}dx$$

$$=\frac{x^{n-1}}{a}\sqrt{ax^2+c}-(n-1)\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+c}}-\frac{(n-1)\,c}{a}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{ax^2+c}}.$$

Второй членъ послѣдняго трехчлена перенесемъ на лѣво, и затѣмъ обѣ части раздѣлимъ на n; получимъ:

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+c}}=\frac{x^{n-1}}{na}\sqrt{ax^2+c}-\frac{(n-1)\,c}{na}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{ax^2+c}}.$$

По этой формулѣ разсматриваемый интегралъ приводится къ подобному же, но простѣйшему: показатель надъ x въ числителѣ подъинтегральной функціи пониженъ на двѣ единицы *). Продолжая пониженіе показателя, мы приведемъ интегралъ при n четномъ къ $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}}$, а при n нечетномъ къ $\int\frac{xdx}{\sqrt{ax^2+c}}$. Изъ этихъ послѣднихъ интеграловъ первый представляетъ логариѳмическую или круговую функцію, смотря по знакамъ a и c, а второй

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{ax^2+c}}=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+c}+C$$

алгебрическую функцію, какъ и тѣ члены, которые выдѣляются постепеннымъ интегрированіемъ по частямъ.

Впрочемъ при n нечетномъ интегралъ $\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+c}}$ можно привесть прямо къ интегралу цѣлой функціи положеніемъ: $\sqrt{ax^2+c}=z$:

$$\int\frac{x^{2k+1}\,dx}{\sqrt{ax^2+c}}=\frac{1}{a^{k+1}}\int(z^2-c)^k\,dz.$$

Примѣры:

a) $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{x^3+3x}{4}\sqrt{x^2-2}+\frac{3}{2}l\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)+C.$

b) $\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{3x^4-8x^2+32}{15}\sqrt{x^2+2}+C.$

---

*) Мы разсматриваемъ эту формулу при положительномъ n; по этому и говоримъ: показатель пониженъ; но она вѣрна и при отрицательномъ значеніи n,— и тогда показатель по абсолютной величинѣ повышается на двѣ единицы

c) $\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-3x^2}} = -\frac{24x^5+10x^3+5x}{432}\sqrt{1-3x^2}+$

$$+\frac{5}{432\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)+C.$$

332. **Интегралъ:** $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ($f(x)$ цѣлая функція).

Если производную функціи ax^2+bx+c, т. е. $2ax+b$, примемъ за новую перемѣнную, то въ ней подъинтегральная функція представится подъ видомъ:

$$\frac{f_1(z)\,dz}{\sqrt{a_1 z^2+c_1}}, \qquad \left(\begin{array}{c}\text{новая перемѣнная}\\ \text{обозначена чрезъ } z\end{array}\right)$$

гдѣ f_1 будетъ цѣлая функція той же степени, какъ и f.

По этому если: $f_1(z) = Az^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-2}z^2 + A_{m-1}z + A_m$, то:

$$\int \frac{f_1(z)\,dz}{\sqrt{a_1 z^2+c_1}} = A\int \frac{z^m\,dz}{\sqrt{a_1 z^2+c_1}} + A_1\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{a_1 z^2+c_1}} + \ldots +$$

$$\ldots + A_{m-1}\int \frac{z\,dz}{\sqrt{a_1 z^2+c_1}} + A_m \frac{dz}{\sqrt{a_1 z^2+c_1}}.$$

Соединяя всѣ алгебраическія части этихъ интеграловъ въ одинъ членъ, а трансцендентныя въ другой, и замѣняя потомъ z суммою $2ax+b$, мы увидимъ, что интегралъ $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приведется къ суммѣ:

$$\varphi(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

въ которой $\varphi(x)$ цѣлая функція x одною степенью ниже $f(x)$, а K постоянное число.

Для опредѣленія $\varphi(x)$ и K можно употребить способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Дифференцируя равенство:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \varphi(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

получимъ:

$$\frac{f(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \varphi'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{(2ax+b)\,\varphi(x)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{K}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

откуда:

$$2(ax^2+bx+c)\,\varphi'(x) + (2ax+b)\,\varphi(x) + 2K = 2f(x).$$

Такъ какъ $f(x)$ m-ой степени, то полагая въ этомъ тождествѣ: $\varphi(x) = B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \ldots + B_{m-1}x + B_m$, и стало-быть: $\varphi'(x) = (m-1)B_1 x^{m-2} + (m-2)B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-1}$, и сравнивая потомъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x съ той и другой стороны уравненія, мы получимъ $m+1$ уравненій первой степени съ $m+1$ неизвѣстными: B_1, B_2, ..., B_m и K, изъ которыхъ эти неизвѣстныя и найдутся *).

Примѣры:

a) $$\int \frac{x^3-2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx = (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{x^2+2x+3} + K\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$(2\alpha x+\beta)\sqrt{x^2+2x+3} + \frac{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} + \frac{K}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{x^3-2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$(2\alpha x+\beta)(x^2+2x+3) + (\alpha x^2+\beta x+\gamma)(x+1) + K = x^3-2x^2-x+1$$

$$3\alpha x^3 + (5\alpha+2\beta)x^2 + (6\alpha+3\beta+\gamma)x + 3\beta+\gamma+K = x^3-2x^2-x+1$$

---

*) Можно и иначе составить $m+1$ уравненій, а именно приписывая x частныя значенія, отдавая при этомъ преимущество тѣмъ, при которыхъ уравненія выходятъ проще.

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha = 1 \\ 5\alpha + 2\beta = -2 \\ 6\alpha + 3\beta + \gamma = -1 \\ 3\beta + \gamma + K = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{11}{6} \\ \gamma = \frac{5}{2} \\ K = 4 \end{array}$$

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\, dx = \frac{2x^2 - 11x + 15}{6} \sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

$$= \frac{2x^2 - 11x + 15}{6} \sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4\, l\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}\right) + C.$$

b) $$\int \frac{x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 1}{\sqrt{4 - 3x - x^2}}\, dx = -\frac{48x^3 - 488x^2 + 2214x - 18291}{192} \sqrt{4 - 3x - x^2} +$$

$$+ \frac{19325}{128} \arcsin \frac{2x + 3}{5} + C.$$

333. Интегралы:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Положенiемъ: $\frac{1}{x} = z$, откуда: $x = \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, первый изъ этихъ интеграловъ приведется къ:

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{cz^2 + bz + a}}.$$

При $c = 0$ онъ будетъ алгебрическiй:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{bz + a}} = -\frac{2}{b}\sqrt{bz + a} + C$$

$$= -\frac{2}{b}\sqrt{\frac{ax + b}{x}} + C = -\frac{2\sqrt{ax^2 + bx}}{bx} + C \text{ *)}$$

Второй положенiемъ: $\frac{1}{x - \alpha} = z$ приведется къ виду:

---

*) Интегралъ этотъ можно получить, опираясь на третье правило № 328, положенiемъ: $\sqrt{ax^2 + bx} = xz$.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a_1 z^2 + b_1 z + c_1}},$$

а алгебрическимъ будетъ, когда функція $ax^2 + bx + c$ содержитъ множителемъ $x - \alpha$; другими словами: когда одинъ изъ корней этой функціи есть α. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ для отысканія интеграла можно обратиться и къ положенію: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha) z$ (третій пріемъ).

Примѣры:

a) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 + 2x + 4}} = \frac{1}{2} l \frac{x}{x + 4 + 2\sqrt{3x^2 + 2x + 4}} + C \quad \ldots\ldots (1)$$

Если-бы, не освобождаясь предварительно отъ множителя x передъ корнемъ въ подъинтегральной функціи, мы прямо преобразовали послѣднюю въ раціональную, употребляя при этомъ первый пріемъ, то получили-бы результатъ по виду, отличный отъ послѣдняго, а именно:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 + 2x + 4}} = \frac{1}{2} l \frac{x\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3x^2 + 2x + 4}}{x\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3x^2 + 2x + 4}} + C_1 \quad . . (2) \text{ *)}$$

Отсюда заключаемъ что разность между (1) и (2) должна быть числомъ постояннымъ. И дѣйствительно: обозначая $\sqrt{3x^2 + 2x + 4}$ черезъ R, имѣемъ:

$$\frac{1}{2} l \frac{x}{x + 4 + 2R} - \frac{1}{2} l \frac{x\sqrt{3} - 2 + R}{x\sqrt{3} + 2 + R} = \frac{1}{2} l \frac{x(x\sqrt{3} + 2 + R)}{(x + 4 + 2R)(x\sqrt{3} - 2 + R)}$$

$$= \frac{1}{2} l \frac{x(x\sqrt{3} + 2 + R)}{x(x\sqrt{3} + 2 + R)(1 + 2\sqrt{3})} = -\frac{1}{2} l \left(1 + 2\sqrt{3}\right).$$

b) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} = l \frac{x}{x + 2 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}} + C$$

$$= l \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} + C_1.$$

c) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 + 2x}} = -\frac{\sqrt{3x^2 + 2x}}{x} + C = -\sqrt{\frac{3x + 2}{x}} + C.$$

---

*) Второй пріемъ привелъ-бы къ (1).

d) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{x+1}{3-x+2\sqrt{2}\sqrt{x^2+x+2}} + C.$

e) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+3x+2}} = 2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + C = \frac{2\sqrt{x^2+3x+2}}{x+2} + C.$

334. **Интегралы:**

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

При m постоянномъ, какъ положительномъ, такъ и отрицательномъ, имѣемъ:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{(2ax+b)\frac{x^{m-1}}{2a} - \frac{b}{2a}x^{m-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int x^{m-1}\, d\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{x^{m-1}}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{m-1}{a}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\cdot x^{m-2}\,dx -$$

$$- \frac{b}{2a}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Обозначимъ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ черезъ R; тогда:

$$\int \frac{x^m\,dx}{R} = \frac{x^{m-1}}{a}R - \frac{m-1}{a}\int \frac{(ax^2+bx+c)\,x^{m-2}dx}{R} - \frac{b}{2a}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{R} =$$

$$= \frac{x^{m-1}}{a}R - (m-1)\int \frac{x^m\,dx}{R} - \frac{(m-1)\,b}{a}\int \frac{x^{m-1}dx}{R} - \frac{(m-1)\,c}{a}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{R} -$$

$$- \frac{b}{2a}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{R}$$

$$m\int \frac{x^m\,dx}{R} = \frac{x^{m-1}}{a}R - \frac{(2m-1)\,b}{2a}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{R} - \frac{(m-1)\,c}{a}\int \frac{x^{m-2}}{R}dx$$

$$\int \frac{x^{m-2}dx}{R} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)\,c}R - \frac{(2m-1)\,b}{(2m-2)\,c}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{R} - \frac{ma}{(m-1)\,c}\int \frac{x^m\,dx}{R}.$$

Вмѣсто m напишемъ $m+2$:

$$\int \frac{x^m\,dx}{R} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,c}R - \frac{(2m+3)\,b}{(2m+2)\,c}\int \frac{x^{m+1}\,dx}{R} - \frac{(m+2)\,a}{(m+1)\,c}\int \frac{x^{m+2}\,dx}{R}.$$

Считая m отрицательнымъ, поставимъ знакъ на видъ, т. е. напишемъ $-n$ вмѣсто m; тогда получимъ:

$$\int\frac{dx}{x^n R}=-\frac{R}{(n-1)cx^{n-1}}-\frac{(2n-3)b}{(2n-2)c}\int\frac{dx}{x^{n-1}R}-\frac{(n-2)a}{(n-1)c}\int\frac{dx}{x^{n-2}R}.$$

По этой формулѣ интегралъ $\int\frac{dx}{x^n R}$ приводится къ подобнымъ же, но простѣйшимъ. Понизить показатель n по ней можно до единицы. При $n=1$ эта формула не годится; но при $n=1$ она и не нужна, потому что интегралъ $\int\frac{dx}{xR}$ намъ извѣстенъ. Еще не годится формула при $c=0$; но въ этомъ случаѣ интегралъ $\int\frac{dx}{x^n R}$ обращается въ слѣдующій:

$$\int\frac{dx}{x^n\sqrt{ax^2+bx}},$$

который положеніемъ: $\sqrt{ax^2+bx}=xz$ приводится къ интегралу цѣлой функціи, а именно къ:

$$\frac{2}{(-b)^m}\int(a-z^2)^{m-1}dz=-\frac{2}{b^m}\int(z^2-a)^{m-1}dz.$$

Интегралъ $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ положеніемъ $x-\alpha=z$ приведется къ $\int\frac{dz}{z^n\sqrt{az^2+b_1z+c_1}}$, гдѣ: $b_1=2a\alpha+b$, $c_1=a\alpha^2+b\alpha+c$. Алгебрическимъ онъ будетъ, когда $c_1=0$, т. е. когда α есть корень функціи ax^2+bx+c.

Примѣры:

a) $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{3x^2+2x+4}}=-\frac{\sqrt{3x^2+2x+4}}{4x}-\frac{1}{8}l\frac{x}{x+4+2\sqrt{3x^2+2x+4}}+C.$$

b) $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{3x^2+2x}}=-\frac{6x^2-2x+1}{5x^3}\sqrt{3x^2+2x}+C.$$

c) $$\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{3x^2+8x+9}}=-\frac{\sqrt{3x^2+8x+9}}{4(x+1)}-\frac{1}{8}l\frac{x+1}{x+5+2\sqrt{3x^2+8x+9}}+C.$$

d) $$\int\frac{dx}{(x+3)^2\sqrt{x^2+4x+3}}=\frac{x+4}{3(x+3)}\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}+C=\frac{(x+4)\sqrt{x^2+4x+3}}{3(x+3)^2}+C.$$

335. Способъ Абеля. Для преобразованія интеграла:

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{ax^2+c}} \qquad \left(\begin{matrix}f \text{ выражаетъ раціо-}\\ \text{нальныя дѣйствія}\end{matrix}\right)$$

въ интегралъ раціональной функціи, удобно принять за новую перемѣнную производную радикала $\sqrt{ax^2+c}$. Обозначая ее чрезъ z, имѣемъ:

$$\left(\sqrt{ax^2+c}\right)' = \frac{ax}{\sqrt{ax^2+c}} = z$$

$$\frac{a^2x^2}{ax^2+c} = z^2, \quad x^2 = \frac{cz^2}{a(a-z^2)},$$

$$ax = z\sqrt{ax^2+c}, \quad adx = \sqrt{ax^2+c}\cdot dz + z\frac{ax\,dx}{\sqrt{ax^2+c}},$$

$$adx = \sqrt{ax^2+c}\cdot dz + z^2dx, \quad \frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{dz}{a-z^2}$$

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \int f\left[\frac{cz^2}{a(a-z^2)}\right]\frac{dz}{a-z^2}.$$

Для примѣра найдемъ *интегралъ:* $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$

$$\left(\sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = z$$

$$x = z\sqrt{x^2-1}, \quad dx = \sqrt{x^2-1}\cdot dz + \frac{zx\,dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \sqrt{x^2-1}\cdot dz + z^2dx,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{dz}{1-z^2}$$

$$x^2 = z^2(x^2-1), \quad x^2 = -\frac{z^2}{1-z^2}, \quad x^2+1 = \frac{1-2z^2}{1-z^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{dz}{2z^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z\sqrt{2}-1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\,\frac{z\sqrt{2}+1}{z\sqrt{2}-1} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\,\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}} + C.$$

336. Въ раціональной функціи перемѣнной x и радикала $\sqrt{ax^2+bx+c}$ всегда можно *отдѣлить раціональную часть отъ ирраціональной*, и въ послѣдней *радикалъ перенести въ знаменатель*. Дѣйствительно: обозначая радикалъ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ чрезъ R, и разумѣя подъ знакомъ f дробныя раціональныя дѣйствія, имѣемъ:

$$f(x,\ R)=\frac{\varphi(x,\ R)}{\psi(x,\ R)}=\frac{P+QR}{P_1+Q_1R},$$

гдѣ φ и ψ цѣлыя функціи x и R, а P, Q, P_1 и Q_1 цѣлыя функціи одного x. Помножимъ числитель и знаменатель послѣдней дроби на P_1-Q_1R; тогда:

$$f(x,\ R)=\frac{(P+QR)(P_1-Q_1R)}{(P_1+Q_1R)(P_1-Q_1R)}=\frac{PP_1-QQ_1R^2}{P_1^2-Q_1^2R^2}+\frac{(QP_1-PQ_1)R^2}{(P_1^2-Q_1^2R^2)R}$$

Функціи $\frac{PP_1-QQ_1R^2}{P_1^2-Q_1^2R^2}$ и $\frac{(QP_1-PQ_1)R^2}{P_1^2-Q_1^2R^2}$ раціональныя. Обозначая первую чрезъ M, вторую чрезъ N, получимъ:

$$f\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)=M+\frac{N}{R}$$

$$\int f\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int Mdx+\int\frac{N}{R}\,dx.$$

Въ первомъ изъ двухъ послѣднихъ интеграловъ подъинтегральная функція — раціональная дробь, а во второмъ — раціональная дробь, дѣленная на радикалъ $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выдѣляя изъ N цѣлую часть, и разлагая оставшуюся часть на простѣйшія дроби, мы приведемъ послѣдній интегралъ къ интеграламъ вида:

$$\int\frac{\xi(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad \int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\quad \text{и}\quad \int\frac{(Ax+B)\,dx}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

($\xi(x)$ цѣлая функція; корни $a_1x^2+b_1x+c_1$ мнимые).

При интегрированіи обыкновенно бываетъ выгоднѣе, прежде преобразованія подъинтегральной функціи въ раціональную, разлагать ее на простѣйшія, и уже къ послѣднимъ примѣнять тотъ или другой пріемъ интегрированія.

Примѣры:

a) $$\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Здѣсь выгоднѣе, не освобождаясь отъ множителей $x-1$ и $x+1$ передъ корнемъ, примѣнить къ обоимъ интеграламъ положеніе: $\sqrt{x^2+1}=z-x$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dz}{z^2-2z-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{z-1-\sqrt{2}}{z-1+\sqrt{2}}+C_1$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dz}{z^2+2z-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{z+1-\sqrt{2}}{z+1+\sqrt{2}}+C_{11}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{(z-1-\sqrt{2})(z+1+\sqrt{2})}{(z-1+\sqrt{2})(z+1-\sqrt{2})}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{z^2-(1+\sqrt{2})^2}{z^2-(1-\sqrt{2})^2}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{x^2-1-\sqrt{2}+x\sqrt{x^2+1}}{x^2-1+\sqrt{2}+x\sqrt{x^2+1}}+C\;\ldots\ldots(1)$$

По способу Абеля:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=z,\quad\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{dz}{1-z^2},\quad x^2-1=\frac{2z^2-1}{1-z^2}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dz}{2z^2-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{z\sqrt{2}-1}{z\sqrt{2}+1}+C_{111}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+1}}+C_{111}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Не трудно показать, что разность между (1) и (2) есть постоянное число.

b) $$\int\frac{(x^3+1)\,dx}{(x^3+x^2-2x)\sqrt{x^2+x+1}}=\int\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{2}{3(x-1)}-\frac{7}{6(x+2)}\right]\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=l\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)+\frac{1}{2}\,l\,\frac{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}+$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\,l\,\frac{x-1-\sqrt{3}+\sqrt{x^2+x+1}}{x-1+\sqrt{3}+\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{7}{6\sqrt{3}}\,l\,\frac{x+2+\sqrt{3}+\sqrt{x^2+x+1}}{x+2-\sqrt{3}+\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

c) $$\int\frac{5x^4+3x^3+6x^2+x+2}{(x^3+x^2+x)\sqrt{2x^2+2x+1}}dx=\int\left[5x-2+\frac{2}{x}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right]\frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$$

$$-\int\frac{(5x-2)\,dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}+\int\frac{2dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}+\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}}$$

$$\int\frac{(5x-2)\,dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+2x+1}-$$

$$-\frac{9}{2\sqrt{2}}\,l\left(2x+1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}\right)+C$$

$$\int\frac{2dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}=2\,l\,\frac{x}{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}+C.$$

Коэффиціенты при x^2 и x трехчленовъ x^2+x+1 и $2x^2+2x+1$ пропорціональны; по этому, принимая производную одного изъ этихъ трехчленовъ за новую перемѣнную, мы въ обоихъ трехчленахъ освободимся сразу отъ членовъ первой степени:

$$(x^2+x+1)'=2x+1=z,\quad x=\frac{z-1}{2},\quad dx=\frac{dz}{2},$$

$$x+1=\frac{z+1}{2},\ x^2+x+1=\frac{z^2+3}{4},\ 2x^2+2x+1=\frac{z^2+1}{2}$$

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}}=\sqrt{2}\int\frac{(z+1)\,dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}}=$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{z\,dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}}+\sqrt{2}\int\frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}}.$$

Изъ двухъ послѣднихъ интеграловъ первый найдемъ, полагая $\sqrt{z^2+1}=t$, а второй по способу Абеля, полагая: $\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}=u$:

$$\sqrt{2}\int\frac{z\,dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}}=\sqrt{2}\int\frac{dt}{t^2+2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{2}}+C$$

$$\sqrt{2}\int\frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}}=\sqrt{2}\int\frac{du}{3-2u^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\,l\,\frac{u\sqrt{2}+\sqrt{3}}{u\sqrt{2}-\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\,l\,\frac{z\sqrt{2}+\sqrt{3}\,.\,\sqrt{z^2+1}}{z\sqrt{2}-\sqrt{3}\,.\,\sqrt{z^2+1}}+C.$$

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}}=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2x^2+2x+1}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,l\,\frac{2x+1+\sqrt{3}\,.\sqrt{2x^2+2x+1}}{2x+1-\sqrt{3}\,.\sqrt{2x^2+2x+1}}+C.$$

И такъ:

$$\int\frac{5x^4+3x^3+6x^2+x+2}{(x^3+x^2+x)\sqrt{2x^2+2x+1}}\,dx=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+2x+1}-$$

$$-\frac{9}{2\sqrt{2}}\,l\left(2x+1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}\right)+$$

$$+2\,l\,\frac{x}{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2x^2+2x+1}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,l\,\frac{2x+1+\sqrt{3}\,.\sqrt{2x^2+2x+1}}{2x+1-\sqrt{3}\,.\sqrt{2x^2+2x+1}}+C.$$

d) $\int\frac{(x-1)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2-2x+2}}$. Коэффиціенты при x^2 и x трехчленовъ x^2-x+1 и x^2-2x+2 не пропорціональны. Положимъ: $x=\frac{\alpha z+\beta}{z+1}$; тогда:

$$dx=\frac{\alpha(z+1)-(\alpha z+\beta)}{(z+1)^2}\,dz=\frac{(\alpha-\beta)\,dz}{(z+1)^2}$$

$$x^2-x+1=\frac{(\alpha z+\beta)^2-(\alpha z+\beta)(z+1)+(z+1)^2}{(z+1)^2}=$$

$$=\frac{(\alpha^2-\alpha+1)z^2+(2\alpha\beta-\alpha-\beta+2)z+\beta^2-\beta+1}{(z+1)^2}$$

$$x^2-2x+2=\frac{(\alpha z+\beta)^2-2(\alpha z+\beta)(z+1)+2(z+1)^2}{(z+1)^2}=$$

$$=\frac{(\alpha^2-2\alpha+2)z^2+(2\alpha\beta-2\alpha-2\beta+4)z+\beta^2-2\beta+2}{(z+1)^2}.$$

Выберемъ α и β такъ, чтобы коэффиціенты при z въ числителяхъ послѣднихъ дробей обратились въ 0, т. е. подчинимъ α и β условіямъ:

$$2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0$$

$$2\alpha\beta-2\alpha-2\beta+4=0.$$

Изъ этихъ условій находимъ: $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 0$; а отсюда два рѣшенія: $\begin{pmatrix}\alpha = 0\\ \beta = 2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\alpha = 2\\ \beta = 0\end{pmatrix}$. Примемъ первое; тогда:

$$x = \frac{2}{z+1}, \quad dx = -\frac{2\,dz}{(z+1)^2}, \quad x - 1 = -\frac{z-1}{z+1},$$

$$x^2 - x + 1 = \frac{z^2+3}{(z+1)^2}, \quad x^2 - 2x + 2 = \frac{2(z^2+1)}{(z+1)^2},$$

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2-2x+2}} = \sqrt{2}\int \frac{(z-1)\,dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}} =$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{z\,dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}} - \sqrt{2}\int \frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}}$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\, \frac{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{z^2+1} + z\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{z^2+1} - z\sqrt{2}} + C.$$

Введя вмѣсто z выраженіе z въ x, т. е. $\frac{2-x}{x}$, получимъ:

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2-2x+2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x} -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\, \frac{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{x^2-2x+2} + 2 - x}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{x^2-2x+2} - (2-x)} + C.$$

337. Интегралъ раціональной функціи x и двухъ радикаловъ $\sqrt{ax+b}$ и $\sqrt{\alpha x+\beta}$ положеніемъ: $\sqrt{ax+b} = z$ приведется къ интегралу раціональной функціи z и одного радикала вида $\sqrt{a_1 z^2 + b_1}$. Дѣйствительно: положеніе это даетъ:

$$ax + b = z^2, \quad x = \frac{z^2-b}{a}, \quad dx = \frac{2\,z\,dz}{a},$$

$$\alpha x + \beta = \frac{\alpha(z^2-b)}{a} + \beta = a_1 z^2 + b_1 \quad \left(a_1 = \frac{\alpha}{a},\ b_1 = \frac{a\beta - b\alpha}{a}\right)$$

$$\int f\left(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{\alpha x+\beta}\right)dx = \frac{2}{a}\int f\left(\frac{z^2-b}{a},\ z, \sqrt{a_1 z^2 + b_1}\right) z\,dz.$$

Примѣръ: $$\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x+2})\sqrt{x+1}}$$

$$\sqrt{x+2} = z,\ x+2 = z^2,\ x = z^2 - 2,\ x+1 = z^2 - 1,\ dx = 2z\,dz,$$

$$\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x+2})\sqrt{x+1}} = \int \frac{2z\,dz}{(z^2+z-2)\sqrt{z^2-1}} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dz}{(z-1)\sqrt{z^2-1}} + \frac{4}{3}\int \frac{dz}{(z+2)\sqrt{z^2-1}}$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{z^2-1}}{z-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\, l\, \frac{z+\sqrt{z^2-1}+2-\sqrt{3}}{z+\sqrt{z^2-1}+2+\sqrt{3}} + C$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\, l\, \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}+2-\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}+2+\sqrt{3}} + C.$$

338. Интегралъ $\int f\left(x, \sqrt{y}\right)dx$, *въ которомъ* f *раціональная функція, а* y *цѣлая функція* x *выше второй степени*, только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ приводится къ интегралу раціональной функціи, и тогда выражается алгебрическими, логариѳмическими и круговыми функціями; вообще же онъ приводится къ особеннымъ функціямъ, которыя называютъ *эллиптическими интегралами*, когда y третьей или четвертой степени, и *Абелевыми*, когда y выше четвертой степени.

Приведемъ примѣры, когда интегралъ, при y выше второй степени, выражается конечною совокупностью функцій, не выходящихъ изъ категоріи алгебрическихъ, логариѳмическихъ и круговыхъ.

a) $$\int \frac{(3x^2+1)\,dx}{(x^3+x+1)\sqrt{x^3+x+1}} = -\frac{2}{\sqrt{x^3+x+1}} + C.$$

b) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{x^2+\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2+2+\sqrt{x^4+x^2+1}} + C.$$

c) $$\int \frac{(4x^3+6x^2-2x-1)\,dx}{(x^4+2x^3-x^2-x+2)\sqrt{x^4+2x^3-x^2-x+1}} =$$

$$= 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{x^4+2x^3-x^3-x+1} + C.$$

d) $$\int \frac{(4x^3+6x^2-2x-1)\,dx}{(x^4+2x^2-x^2-x)\sqrt{x^4+2x^3-x^2-x+1}} =$$

$$= l\,\frac{\sqrt{x^4+2x^3-x^2-x+1}-1}{\sqrt{x^4+2x^2-x^2-x+1}+1} + C.$$

e) $\int \frac{(7x^6-1)\,dx}{(x^7-x)(x^7-x+2)\sqrt{x^7-x+1}} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{\sqrt{x^7-x+1}-1}{\sqrt{x^7-x+1}+1} -$

$$-\operatorname{arctg}\sqrt{x^7-x+1} + C.$$

339. Интегралъ $\int ydx$, *въ которомъ* y *иррацiональная функцiя* x, *заданная уравненiемъ*:

$$Xy^n + X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \ldots + X_{n-1} y + X_n = 0,$$

мы найдемъ, если коэффицiенты X, X_1, X_2, ..., X_{n-1} и X_n цѣлыя функцiи x первой степени, другими словами: если послѣднее уравненiе имѣетъ видъ:

$$(ax+b)y^n + (a_1x+b_1)y^{n-1} + (a_2x+b_2)y^{n-2} + \ldots +$$

$$+ (a_{n-1}x+b_{n-1})y + a_nx + b_n = 0.$$

Дѣйствительно: разрѣшая это уравненiе относительно x, и интегрируя по частямъ ydx, получимъ:

$$x = -\frac{by^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \ldots + b_{n-1}y + b_n}{ay^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n}$$

$$\int ydx = xy - \int xdy =$$

$$= xy + \int \frac{by^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \ldots + b_{n-1}y + b_n}{ay^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n}\,dy,$$

откуда видимъ, что интегрированiе приводится къ интегрированiю рацiональной функцiи.

Примѣръ: Найти интегралъ $\int ydx$, въ которомъ y удовлетворяетъ уравненiю:

$$y^5 + 2y^4 - xy^3 - (x+1)y - 1 = 0.$$

Изъ уравненiя имѣемъ:

$$x = \frac{y^5 + 2y^4 - y - 1}{y^3 + y};$$

по этому:

$$\int ydx = xy - \int xdy = xy - \int \frac{y^5 + 2y^4 - y - 1}{y^3 + y}\,dy.$$

Выдѣляя изъ дроби $\frac{y^5+2y^4-y-1}{y^3+y}$ цѣлую часть и разлагая оставшуюся часть на простѣйшія дроби, получимъ:

$$\frac{y^5+2y^4-y-1}{y^3+y}=y^2+2y-1-\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2+1};$$

слѣдовательно:

$$\int ydx=xy-\int(y^2+2y-1)\,dy+\int\frac{dy}{y}+\int\frac{ydy}{y^2+1}$$

$$=xy-\frac{y^3}{3}-y^2+y+ly+\frac{1}{2}l(y^2+1)+C.$$

Интегралы дифференціальныхъ биномовъ.

340. Выраженіе вида: $x^k(ax^m+bx^n)^p\,dx$ называютъ *дифференціальнымъ биномомъ*. Оно — раціональное, когда показатели k, m, n и p цѣлые, — и ирраціональное, когда хотя одинъ изъ этихъ показателей дробный (соизмѣримый). Въ первомъ случаѣ мы въ состояніи найти интегралъ

$$\int x^k(ax^m+bx^n)^p\,dx,$$

какъ интегралъ функціи раціональной. Во второмъ случаѣ найдемъ его, когда показатель p цѣлый, хотя-бы k, m и n были дробными *). Для этого положимъ: $x^{\frac{1}{\mu}}=z$, гдѣ μ наименьшее кратное знаменателей у k, m и n, и затѣмъ выразимъ подъинтегральную функцію въ перемѣнной z; тогда интегралъ приведется къ интегралу функціи раціональной (№ 327). Намъ остается по этому разсмотрѣть приведенный интегралъ только при p дробномъ, при чемъ показатели k, m и n какіе угодно, но соизмѣримые, (хотя впрочемъ эти показатели введеніемъ новой перемѣнной всегда могутъ быть приведены къ цѣлымъ).

Такъ какъ:

$$x^k(ax^m+bx^n)^p=x^{k+mp}(a+bx^{n-m})^p,$$

---

*) Если показатель p цѣлый и при томъ положительный, то мы найдемъ интегралъ и въ случаѣ несоизмѣримыхъ k, m и n.

то, обозначая $k+mp$ и $n-m$ чрез m_1 и n_1, получимъ:

$$x^k(ax^m+bx^n)^p\,dx = x^{m_1}(a+bx^{n_1})^p\,dx.$$

Отсюда видимъ, что взятый нами дифференціальный биномъ можно привести къ простѣйшей формѣ, а именно слѣдующей:

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Въ этой формѣ и будемъ его разсматривать.

Положимъ:

$$a+bx^n = z;$$

тогда:

$$x = \frac{(z-a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}},\quad x^{m+1} = \frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n}}}{b^{\frac{m+1}{n}}},\quad x^m\,dx = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}dz,$$

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int z^p(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}dz.$$

Отсюда видимъ, что каковъ-бы ни былъ показатель p (дробный соизмѣримый), мы интегралъ $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ найдемъ, если только $\frac{m+1}{n}$ цѣлое число (включая и 0). Впрочемъ и при несоизмѣримомъ p интегралъ найдется, если $\frac{m+1}{n}$ цѣлое положительное.

Сдѣлаемъ теперь другое преобразованіе:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx.$$

Изъ этого преобразованія видимъ, что интегралъ $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ найдется, когда $\frac{m+np+1}{-n}$ цѣлое число, или, что все равно, когда $\frac{m+1}{n}+p$ цѣлое число (включая и 0) *).

---

*) Мы вообще считаемъ интегралъ найденнымъ, когда въ состояніи выразить его конечною совокупностью извѣстныхъ намъ функцій, а именно: алгебраическихъ, логарифмическихъ, показательныхъ, круговыхъ и тригонометрическихъ.

И такъ при p дробномъ мы въ состояніи найти интегралъ:

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx,$$

когда $\frac{m+1}{n}$ цѣлое число, или когда $\frac{m+1}{n} + p$ цѣлое число.

Примѣры:

a) $$\int x^7 \sqrt[5]{(2x^4+1)^2}\, dx = \frac{5}{1344}(28x^8 + 4x^4 - 5)\sqrt[5]{(2x^4+1)^2} + C.$$

b) $$\int \sqrt[5]{x^3} \sqrt[7]{\left(1+x\sqrt[5]{x^2}\right)^6} \cdot dx = \frac{35}{104}(1+x\sqrt[5]{x^3})\sqrt[7]{\left(1+x\sqrt[5]{x^3}\right)^6} + C.$$

c) $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(x^4-1)^2}} = \frac{1}{4} l\left(1+\sqrt[3]{x^4-1}\right) - \frac{1}{8} l\left[1-\sqrt[3]{x^4-1}+\sqrt[3]{(x^4-1)^2}\right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x^4-1}-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{3}{8} l\left(1+\sqrt[3]{x^4-1}\right) - \frac{1}{2} l x + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x^4-1}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Если обозначить $\sqrt[3]{x^4-1}$ чрезъ r, то:

$$\frac{1}{4} l(1+r) - \frac{1}{8} l(1-r+r^2) = \frac{1}{8} l \frac{(1+r)^2}{1-r+r^2} = \frac{1}{8} l \frac{(1+r)^3}{1+r^3} =$$

$$= \frac{3}{8} l(1+r) - \frac{1}{8} l(1+r^3) = \frac{3}{8} l(1+r) - \frac{1}{8} l(x^4) =$$

$$= \frac{3}{8} l(1+r) - \frac{1}{2} l x.$$

d) $$\int \frac{\sqrt[5]{x^3}\, dx}{\sqrt{x\sqrt[15]{x}-1}} = \frac{15}{16}\sqrt[15]{x^8}\sqrt{x\sqrt[15]{x}-1} + \frac{15}{32} l \frac{\sqrt{x\sqrt[15]{x}-1}+\sqrt[15]{x^8}}{\sqrt{x\sqrt[15]{x}-1}-\sqrt[15]{x^8}} + C.$$

341. Если, при p дробномъ, показатели не удовлетворяютъ ни тому, ни другому условію, т. е. если и p, и $\frac{m+1}{n}$, и $\frac{m+1}{n} + p$,

дробныя числа, то интегралъ $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ не выразится извѣстными намъ функціями. Но мы можемъ тогда привести его къ простѣйшему. Положимъ: $x^n = y$; тогда:

$$x^{m+1} = y^{\frac{m+1}{n}}, \quad x^m dx = \frac{1}{n} y^{\frac{m+1}{n} - 1} dy,$$

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int y^{\frac{m+1}{n} - 1} (a + by)^p dy.$$

Сдѣлаемъ еще положеніе: $by = -az$; тогда:

$$y = -\frac{a}{b} z, \quad dy = -\frac{a}{b} dz,$$

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \cdot a^p \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \int z^{\frac{m+1}{n} - 1} (1 - z)^p dz.$$

Показатели $\frac{m+1}{n} - 1$ и p и сами по себѣ дробные, и сумма ихъ дробное число.

И такъ разсматриваемый интегралъ приводится къ виду:

$$\int x^m (1 - x)^n dx,$$

гдѣ m, n и $m + n$ дробныя числа.

Этотъ интегралъ можно еще упростить пониженіемъ абсолютныхъ величинъ показателей m и n. Продифференцируемъ произведеніе: $x^m (1 - x)^n$.

$$d[x^m (1 - x)^n] = mx^{m-1} (1 - x)^n dx - nx^m (1 - x)^{n-1} dx.$$

Интегрируя обѣ части этого тождества, получимъ:

$$x^m (1 - x)^n + C = m \int x^{m-1} (1 - x)^n dx - n \int x^m (1 - x)^{n-1} dx \ldots (1)$$

Изъ двухъ интеграловъ, сюда входящихъ, мы выразимъ первый во второмъ, когда $m < 0$, а $n > 0$, и второй въ первомъ, когда $m > 0$, а $n < 0$. Въ обоихъ случаяхъ тогда приведемъ интегралы къ простѣйшимъ, понизивши на единицу абсолютныя величины показателей, какъ надъ x, такъ и надъ $1 - x$.

Представимъ теперь произведеніе $x^{m-1}(1-x)^n dx$ подъ видомъ: $x^{m-1}(1-x)^{n-1}(1-x)dx$, или разностью:

$$x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx - x^m(1-x)^{n-1}dx,$$

а интегралъ этого произведенія разностью двухъ интеграловъ; тогда:

$$x^m(1-x)^n + C =$$

$$= m\int x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx - m\int x^m(1-x)^{n-1}dx - n\int x^m(1-x)^{n-1}dx.$$

или:

$$x^m(1-x)^n + C =$$

$$= m\int x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx - (m+n)\int x^m(1-x)^{n-1}dx \ldots (2)$$

По этой формулѣ, выражая второй интегралъ въ первомъ, когда $m > 0$, и первый во второмъ, когда $m < 0$, мы приведемъ интегралъ къ простѣйшему пониженіемъ на единицу абсолютной величины показателя только надъ x, не измѣняя при этомъ показателя надъ $1-x$. Поставимъ въ этой формулѣ $1-x$ на мѣсто x, и потомъ перемѣнимъ m на n, а n на m; тогда получимъ:

$$x^m(1-x)^n + C =$$

$$= -n\int x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx + (m+n)\int x^{m-1}(1-x)^n dx \ldots (3)$$

Отсюда, выражая второй интегралъ въ первомъ, когда $n > 0$, и первый во второмъ, когда $n < 0$, мы приведемъ ихъ къ простѣйшимъ пониженіемъ показателей надъ $1-x$, при чемъ показатели надъ x остаются безъ измѣненія.

Такимъ образомъ, при посредствѣ формулъ (1), (2) и (3), мы приведемъ интегралъ $\int x^m(1-x)^n dx$ къ такому, въ которомъ m и n будутъ заключаться между -1 и $+1$. Выводя изъ формулъ (1), (2) или (3) тотъ или другой интегралъ, мы не встрѣтимъ выраженій невозможныхъ, потому что при этомъ дѣлителями будутъ числа, отличныя отъ 0, а именно: m, или n, или $m+n$, — числа дробныя.

Интегралы логариѳмическихъ функцій.

342. $\int lx\,dx = xlx - x + C$

$\int Lx\,dx = \frac{1}{la}\int lx\,dx = \frac{xlx - x}{la} + C$

$= xLx - xLe + C = xL\frac{x}{e} + C$

{ l знакъ Неперова логариѳма; L знакъ логариѳма при основаніи a; e Неперово основаніе }

$\int f(lx)\,dx = xf(lx) - \int f'(lx)\,dx$

$= xf(lx) - xf'(lx) + \int f''(lx)\,dx$

$= xf(lx) - xf'(lx) + xf''(lx) - \int f'''(lx)dx$

{ Здѣсь производныя берутся относительно lx }

$\int f(lx)\,dx =$

$= x[f(lx) - f'(lx) + f''(lx) - f'''(lx) + \ldots + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}(lx)] +$

$+ (-1)^n \int f^{(n)}(lx)\,dx.$

Если f цѣлая функція $n^{\text{ой}}$ степени, то $f^{(n)}(lx)$ постоянное число, — и тогда:

$\int f(lx)\,dx =$

$= x[f(lx) - f'(lx) + f''(lx) - \ldots + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}(lx) + (-1)^n f^{(n)}(lx)] + C.$

Примѣры:

a) $\int (lx)^5 dx = x[(lx)^5 - 5(lx)^4 + 20(lx)^3 - 60(lx)^2 + 120lx - 120] + C.$

b) $\int [(lx)^3 + 4(lx)^2 - lx + 1]dx = x[(lx)^3 + (lx)^2 - 3lx + 4] + C.$

343. $\int x^a (lx)^n\,dx = \int (lx)^n \cdot d\frac{x^{a+1}}{a+1}$

$= \frac{x^{a+1}}{a+1}(lx)^n - \frac{n}{a+1}\int x^a (lx)^{n-1}\,dx.$ (a отличается отъ -1)

При $a = -1$:

$\int \frac{(lx)^n}{x}\,dx = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C.$

Вообще легко найдутся *интегралы*:

$$\int f(x)\,\varphi(lx)\,dx \quad \text{и} \quad \int x^a\,\varphi(lx)\,dx\,,$$

если f и φ цѣлыя функціи.

Примѣры:

a) $\int (x^3 + x + 1)\Big[(lx)^3 - 2\,lx - 1\Big]dx =$

$$= \frac{x^4+2x^2+4x}{4}(lx)^3 - \frac{5x^4+12x^2+32x}{8}\,lx - \frac{3x^4-8x^2-96x}{32} + C.$$

b) $\int \frac{(lx)^3 + 2\,lx - 1}{x\sqrt[3]{x^2}}\,dx = -\frac{12\,(lx)^3 + 54\,(lx)^2 + 186\,lx + 267}{8\sqrt[3]{x^2}} + C.$

344. $\int \frac{dx}{(lx)^n} = \int x\frac{d\,lx}{(lx)^n} = -\frac{1}{n-1}\int x d\frac{1}{(lx)^{n-1}}$

$$= -\frac{x}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(lx)^{n-1}}\,.$$

Если n цѣлое положительное число, то по этой формулѣ интегралъ $\int \frac{dx}{(lx)^n}$ приводится къ подобному же интегралу, но простѣйшему, а именно съ меньшимъ на единицу показателемъ надъ логариѳмомъ; послѣдній интегралъ пониженіемъ показателя также приведется къ простѣйшему, и т. д.; наконецъ приведемъ его къ интегралу:

$$\int \frac{dx}{lx}\,,$$

который составляетъ особенную функцію, называемую *интегрально-логариѳмическою*.

Къ такой функціи приводится и интегралъ

$$\int \frac{x^a\,dx}{(lx)^n}\,,$$

если постоянное число a отличается отъ -1, а n цѣлое и положительное; дѣйствительно, полагая: $x^{a+1} = z$, откуда: $(a+1)\,x^a\,dx = dz$, $(a+1)\,lx = lz$, находимъ:

$$\int \frac{x^a\,dx}{(lx)^n} = (a+1)^{n-1}\int \frac{dz}{(lz)^n}\,.$$

Если же $a = -1$, то:

$$\int \frac{dx}{x(lx)^n} = \int \frac{dlx}{(lx)^n} = -\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}} + C.$$

Эта формула годится какъ при цѣлыхъ, такъ и при дробныхъ значеніяхъ n, исключая $n = 1$; а при $n = 1$ будетъ:

$$\int \frac{dx}{xlx} = llx + C.$$

345. Интегралъ

$$\int \frac{f(lx)\,dx}{\text{[illegible]}}$$

положеніемъ $lx = z$, откуда: $\frac{dx}{x} = dz$, приводится къ

$$\int f(z)\,dz,$$

и по этому найдется, когда f функція раціональная, или хотя бы и ирраціональная, но изъ категоріи тѣхъ, интегралы которыхъ мы выше приводили.

Примѣры:

a) $\int \frac{(lx)^3 + 1}{x[(lx)^2 + 1]} dx = \frac{(lx)^2}{2} - \frac{1}{2} l\left[1 + (lx)^2\right] + \operatorname{arc\,tg} lx + C.$

b) $\int \frac{dx}{x(lx)^3\sqrt{3(lx)^2 + 2lx}} = -\frac{6(lx)^2 - 2lx + 1}{5(lx)^3}\sqrt{3(lx)^2 + 2lx} + C.$

346. Если f и φ раціональныя функціи, и изъ нихъ φ цѣлая, то интегрированіемъ по частямъ легко найдемъ слѣдующіе *интегралы:*

$$\int l f(x)\,dx,\quad \int \varphi(x)\, l f(x)\,dx,\quad \int \frac{l f(x).dx}{(x+a)^n}\quad \left(\begin{matrix} n \text{ цѣлое положительное} \\ \text{число, бóльшее 1-цы} \end{matrix}\right)$$

Примѣры:

a) $\int l(x^3 + x - 2)\cdot dx = \quad 3x + x\,l(x^3 + x - 2) -$

$$- l(x-1) + \frac{1}{2} l(x^2 + x + 2) + \sqrt{7}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

b) $\int (x^2 + 2x - 1)\, l(x^2+1) \cdot dx = \int l(x^2+1) \cdot d\, \frac{x^3+3x^2-3x}{3} =$

$$= -\frac{2x^3+9x^2-24x}{9} + \frac{x^3+3x^2-3x+3}{3}\, l(x^2+1) - \frac{8}{3} \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

c) $\int \frac{l(x^2+3x+2)}{(x-1)^3}\, dx = -\frac{1}{2} \int l(x^2+3x+2)\, d\, \frac{1}{(x-1)^2} =$

$$= -\frac{5}{12(x-1)} - \frac{l(x^2+3x+2)}{2\,(x-1)^2} + \frac{9\, l(x+1) + 4\, l(x+2) - 13\, l(x-1)}{72} + C.$$

Интегралы показательныхъ функцій.

347. $\int e^x\, dx = e^x + C$

$$\int e^{\alpha x}\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{la} + C$$

$$\int a^{\alpha x}\, dx = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, la} + C.$$

Преобразуемъ *интегралъ* $\int f(a^{\alpha x})\, dx$ положеніемъ: $a^{\alpha x} = z$:

$$a^{\alpha x} \cdot \alpha\, la \cdot dx = dz\,, \quad dx = \frac{1}{\alpha\, la} \cdot \frac{dz}{z}\,,$$

$$\int f(a^{\alpha x})\, dx = \frac{1}{\alpha\, la} \int \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

Если f выражаетъ раціональныя дѣйствія, то интегралъ этотъ найдемъ. Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ найдемъ и при ирраціональномъ f.

Примѣры:

a) $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}-e^x+1}\, dx = x - \frac{1}{2}\, l(e^{2x}-e^x+1) + \sqrt{3} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{2e^x-1}{\sqrt{3}} + C$

b) $\int \frac{dx}{2^{3x}+2^x} = -\frac{1}{2^x\, l2} - \frac{1}{l2} \operatorname{arc\,tg}(2^x) + C$

c) $\int \frac{dx}{(e^{2x}+1)^3} = x - \frac{1}{2}\, l(e^{2x}+1) + \frac{1}{2(e^{2x}+1)} + \frac{1}{4(e^{2x}+1)^2} + C$

d) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+1}} = l\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right) + C$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{\sqrt{e^{2x}+1}-1}{\sqrt{e^{2x}+1}+1} + C.$

Въ примѣрѣ *c* будетъ удобнѣе интегрированіе, если положить: $e^{2x}+1 = z$. Въ примѣрѣ *e* можно положить: $\sqrt{e^{2x}+1} = z$.

348. Интегрированіемъ по частямъ находимъ:

$$\int f(x)\, a^{\alpha x}\, dx = \int f(x)\cdot d\,\frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, la} = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, la} f(x) - \frac{1}{\alpha\, la}\int f'(x)\cdot a^{\alpha x}\, dx$$

$$\int f'(x)\, a^{\alpha x}\, dx = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, la} f'(x) - \frac{1}{\alpha\, la}\int f''(x)\, a^{\alpha x}\, dx$$

и т. д.

По этому если $f(x)$ цѣлая функція $n^{ой}$ степени, то:

$$\int f(x)\, a^{\alpha x}\, dx = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, la}\Big[f(x) - \frac{f'(x)}{\alpha\, la} + \frac{f''(x)}{(\alpha\, la)^2} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(\alpha\, la)^{n-1}} + (-1)^n\cdot\frac{f^{(n)}(x)}{(\alpha l\, a)^n}\Big] + C.$$

Примѣръ:

$$\int (x^3 + 2x^2 - 3x - 1)\, e^{-2x}\, dx = -\frac{4x^3+14x^2+2x-3}{8}\, e^{-2x} + C.$$

Вообще, если f цѣлая функція, то *интегралъ* $\int f(x)\, a^{\alpha x}\, dx$ выражается произведеніемъ: $\varphi(x)\, a^{\alpha x}$, въ которомъ φ цѣлая функція одинаковой степени съ f; по этому можно искать его по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Пояснимъ на послѣднемъ примѣрѣ:

$$\int (x^3 + 2x^2 - 3x - 1)\, e^{-2x}\, dx = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\, e^{-2x} + C$$

$$(3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\, e^{-2x} - 2(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\, e^{-2x} =$$

$$= (x^3 + 2x^2 - 3x - 1)\, e^{-2x}$$

$$-2\alpha x^3 + (3\alpha - 2\beta)x^2 + (2\beta - 2\gamma)x + \gamma - 2\delta = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

$$\left.\begin{aligned} -2\alpha &= 1 \\ 3\alpha - 2\beta &= 2 \\ 2\beta - 2\gamma &= -3 \\ \gamma - 2\delta &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \alpha &= -\tfrac{1}{2} \\ \beta &= -\tfrac{7}{4} \\ \gamma &= -\tfrac{1}{4} \\ \delta &= \tfrac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\int (x^3 + 2x^2 - 3x - 1) e^{-2x} dx = -\frac{4x^3 + 14x^2 + 2x - 3}{8} e^{-2x} + C.$$

349. Интегрированіе по частямъ даетъ:

$$\int \frac{a^{\alpha x}\, dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \int a^{\alpha x}\, d\frac{1}{x^{n-1}} \qquad \left(\begin{array}{c} n \text{ отличается} \\ \text{отъ 1-цы.} \end{array}\right)$$

$$= -\frac{a^{\alpha x}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\alpha\, la}{n-1} \int \frac{a^{\alpha x}\, dx}{x^{n-1}}.$$

Если n цѣлое и положительное число, бо̀льшее 1-цы, то по этой формулѣ приведемъ *интегралъ* $\int \frac{a^{\alpha x}\, dx}{x^n}$ къ подобному же простѣйшему, пониженіемъ на единицу показателя надъ x въ знаменателѣ подъинтегральной функціи.

Постепеннымъ пониженіемъ показателя мы приведемъ его къ интегралу:

$$\int \frac{a^{\alpha x}\, dx}{x};$$

а этотъ положеніемъ $a^{\alpha x} = z$ къ интегрально-логариѳмической функціи:

$$\int \frac{a^{\alpha x}\, dx}{x} = \int \frac{dz}{lz}.$$

Интегралы тригонометрическихъ функцій.

350. Простѣйшіе интегралы:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + C, \qquad \int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + C,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x+\cos x \sin x}{2} + C, \quad \int \sin^2 x\,dx = \frac{x-\cos x \sin x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = l \sin x + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -l \cos x + C,$$

$$\int \cos x \sin x\,dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_1,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = l \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C = l \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

351. Интералы: $\int \cos^n x\,dx$ и $\int \sin^n x\,dx$.

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cdot d \sin x = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1) \int \cos^n x\,dx.$$

$$n \int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\,dx.$$

Въ этой формулѣ два интеграла; если $n > 0$, то мы выразимъ первый во второмъ, если же $n < 0$, то второй въ первомъ, и такимъ образомъ получимъ двѣ формулы для преобразованія интеграловъ въ простѣйшіе пониженіемъ абсолютныхъ величинъ показателей на двѣ единицы.

Выражая первый во второмъ, получимъ:

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\,dx \quad \ldots\ldots (1)$$

Если же выразить второй въ первомъ, и замѣнить потомъ $n-2$ на $-n$, то получимъ:

$$\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Также нашли-бы и формулы для приведенія интеграловъ: $\int\sin^n x\,dx$ и $\int\frac{dx}{\sin^n x}$ къ простѣйшимъ. Впрочемъ, имѣя уже формулы (1) и (2), мы можемъ послѣднія получить проще, а именно замѣненіемъ x на $x-\frac{\pi}{2}$.

Онѣ будутъ:

$$\int\sin^n x\,dx=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx\ldots\ldots(3)$$

$$\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}\ldots\ldots\ldots(4)$$

Подставляя въ формулы (1), (2), (3) и (4) вмѣсто n послѣдовательно числа 3, 4, ..., получимъ:

$$\int\cos^3 x\,dx=\frac{\cos^2 x\sin x}{3}+\frac{2}{3}\sin x+C$$

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}l\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C$$

$$\int\sin^3 x\,dx=-\frac{\sin^2 x\cos x}{3}-\frac{2}{3}\cos x+C$$

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}l\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C$$

$$\int\cos^4 x\,dx=\frac{\cos^3 x\sin x}{4}+\frac{3\cos x\sin x}{8}+\frac{3x}{8}+C$$

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\frac{\sin x}{3\cos^3 x}+\frac{2}{3}\mathrm{tg}\,x+C=\mathrm{tg}\,x+\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+C$$

$$\int\sin^4 x\,dx=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3\sin x\cos x}{8}+\frac{3x}{8}+C$$

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x}=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}-\frac{2}{3}\mathrm{cotg}\,x+C=-\mathrm{cotg}\,x-\frac{\mathrm{cotg}^3 x}{3}+C.$$

Интегралы положительныхъ степеней косинуса или *синуса* можно искать также, предварительно разлагая эти степени на суммы первыхъ степеней косинусовъ или синусовъ кратныхъ дугъ.

Примѣры:

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{8}\int (\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\sin 4x}{4} + 2\sin 2x + 3x\right] + C$$

$$\int \sin^4 x\, dx = \frac{1}{8}\int [\cos 4x - 4\cos 2x + 3]\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\sin 4x}{4} - 2\sin 2x + 3x\right) + C$$

$$\int \cos^5 x\, dx = \frac{1}{16}\int (\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{\sin 5x}{5} + \frac{5\sin 3x}{3} + 10\sin x\right) + C$$

$$\int \sin^5 x\, dx = \frac{1}{16}\int (\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\frac{\cos 5x}{5} - \frac{5\cos 3x}{3} + 10\cos x\right) + C.$$

Интегралы нечетныхъ степеней косинуса или *синуса* можно искать также приведеніемъ ихъ къ интеграламъ цѣлыхъ функцій. Для интеграла степени косинуса положимъ: $\sin x = y$, а для интеграла степени синуса: $\cos x = z$; тогда:

$$\int \cos^{2k+1} x\, dx = \int (1 - y^2)^k\, dy$$

$$\int \sin^{2k+1} x\, dx = -\int (1 - z^2)^k\, dz.$$

Примѣры:

$$\int \cos^5 x\, dx = \int (1 - y^2)^2\, dy = \int (1 - 2y^2 + y^4)\, dy =$$

$$= y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + C$$

$$= \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

$$\int \sin^5 x\,dx = -\int (1-z^2)^2 dz = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

352. Интегралъ: $\int \sin^m x \cos^n x\,dx.$

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x\,d\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx \ldots (1)$$

Первый интегралъ выразимъ въ послѣднемъ, когда $m < 0$, а $n > 0$, и наоборотъ: послѣднiй въ первомъ, когда $m > 0$, а $n < 0$. Въ обоихъ случаяхъ интегралъ приведется къ простѣйшему пониженiемъ абсолютныхъ величинъ показателей какъ надъ синусомъ, такъ и надъ косинусомъ.

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\int \sin^{m-1} x\,d\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx \ldots (2)$$

Изъ этой формулы первый интегралъ выразимъ во второмъ, когда $m > 0$, а $n < 0$, и второй въ первомъ, когда $m < 0$, а $n > 0$. Впрочемъ достаточно изъ послѣднихъ двухъ формулъ только первый интегралъ разсматривать выраженнымъ во второмъ, и употреблять первую, когда $m < 0$, а $n > 0$, а вторую, когда $m > 0$, а $n < 0$. Поставимъ на видъ знаки показателей, т. е. въ первой формулѣ напишемъ $-m$ на мѣсто m, а во второй $-n$ на мѣсто n; тогда онѣ примутъ видъ:

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx = -\frac{\cos^{n-1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin^{m-2} x}dx \;\ldots\; (3)$$

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx = \frac{\sin^{m-1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x}dx \ldots\ldots (4)$$

Онѣ не годятся: (3) при $m = 1$, а (4) при $n = 1$.

Разложимъ теперь въ (1) $\sin^{m+2} x$ на множители $\sin^m x$ и $\sin^2 x$, и второй замѣнимъ разностью $1 - \cos^2 x$; тогда получимъ:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx -$$

$$-\frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

а отсюда:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx \ldots (5)$$

Изъ (2), замѣною $\cos^{n+2} x$ произведеніемъ $\cos^n x\ (1 - \sin^2 x)$, и потомъ разложеніемъ интеграла, нашли-бы:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx \ldots (6)$$

Формулу (6) можно было-бы получить изъ (5) замѣною x на $x - \frac{\pi}{2}$, m на n и n на m *).

Поставимъ въ (6) $n - 2$ на мѣсто n; получимъ:

$$\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{m+n-2} + \frac{m-1}{m+n-2}\int \sin^{m-2} x \cos^{n-2} x\, dx,$$

а формулу (5) обратимъ въ слѣдующую:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} - \frac{(n-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{(m+n)(m+n-2)} +$$

$$+ \frac{(n-1)(m-1)}{(m+n)(m+n-2)}\int \sin^{m-2} x \cos^{n-2} x\, dx.$$

По этой формулѣ, при $m > 0$ и $n > 0$, мы приведемъ интегралъ $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ къ простѣйшему, понижая на двѣ единицы какъ показатель надъ синусомъ, такъ и надъ косинусомъ. Въ ней: $m + n > 2$.

Выводя изъ этой формулы второй интегралъ въ первомъ, мы привели-бы второй къ простѣйшему, когда $m < 0$ и $n < 0$. Впрочемъ въ случаѣ отрицательныхъ показателей надъ синусомъ и косинусомъ удобнѣе употребить слѣдующее преобразованіе: перенесемъ отрицательные степени синуса и косинуса въ знаменатель положительными степенями, затѣмъ замѣнимъ 1-цу суммою: $\cos^2 x + \sin^2 x$, и разложимъ интегралъ на два:

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^m x \cos^n x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x} + \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}.$$

*) Формулы (5) и (6) приведутъ къ формуламъ (1) и (3) № 351, если положимъ въ (5) $m = 0$, а въ (6) $n = 0$.

Съ послѣдними двумя интегралами поступимъ также, и т. д.

Формулу (3) получимъ, употребляя и слѣдующія преобразованія:

$$\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} = \int \cos^{n-1} x \cdot \frac{d \sin x}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1}\int \cos^{n-1} x d\frac{1}{\sin^{m-1} x} =$$

$$= -\frac{\cos^{n-1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} x\,dx}{\sin^{m-2} x}.$$

Подобный же пріемъ приведетъ и къ (4).

Формулу (2) n⁰ 351 можемъ получить такъ:

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^n x} dx = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^n x} + \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} + \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Также получится и (4) n⁰ 351.

Если n четное число, то интегралъ $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ положеніемъ: $\operatorname{tg} x = z$ приводится къ интегралу цѣлой функціи:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2k} x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\cos^{2k-2} x} = \int (1+z^2)^{k-1}\,dz.$$

Интегралъ $\int \frac{dx}{\sin^{2k} x}$ положеніемъ $\operatorname{cotg} x = z$ также приводится къ интегралу цѣлой функціи:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k} x} = -\int (1+z^2)^{k-1}\,dz.$$

Если $m+n$ четное число, то интегралъ $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$ положеніемъ $\operatorname{tg} x = z$ приводится къ интегралу раціональной дроби съ одночленнымъ знаменателемъ:

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \int \frac{(z^2+1)^{k-1}}{z^m} dz \quad (m+n=2k)$$

Если одинъ изъ показателей m или n нечетное число, то ни-

теграль $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ легко приводится къ интегралу цѣлой функціи:

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int z^m (1 - z^2)^k dz \qquad (z = \sin x)$$

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = -\int z^n (1 - z^2)^k dz \quad (z = \cos x).$$

Если показатель m нечетное число, то интегралы $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$ и $\int \frac{\cos^m a}{\sin^n x} dx$ приводятся къ интеграламъ раціональныхъ дробей съ одночленными знаменателями:

$$\int \frac{\sin^{2k+1} x}{\cos^n x} dx = -\int \frac{(1-z^2)^k dz}{z^n} \qquad (z = \cos x)$$

$$\int \frac{\cos^{2k+1} x}{\sin^n x} dx = \int \frac{(1 - z^2)^k dz}{z^n} \qquad (z = \sin x).$$

Примѣры:

$$\int \sin x \cos^2 x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C, \quad \int \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{\sin^3 x \cos x}{4} - \frac{\sin x \cos x}{8} + \frac{x}{8} + C$$

$$\int \sin x \cos^3 x\, dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + C, \quad \int \sin^3 x \cos x\, dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C,$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \cos x + l \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C, \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx =$$

$$= -\sin x + l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + l \sin x + C, \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - l \cos x + C$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx = \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + l \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C, \quad \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C,$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = -\sin x - \frac{1}{\sin x} + C, \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\cos x \sin x - \frac{\cos^3 x}{\sin x} + C$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\cos x \sin x + \frac{\sin^3 x}{\cos x} + C$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C, \quad \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2\cos^2 x} + C,$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} l \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{3}{2}\cos x - \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} l \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx = \frac{3}{2}\sin x + \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x} - \frac{3}{2} l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3\cos^3 x} + C, \quad \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx = -\frac{1}{3\sin^3 x} + C,$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C, \quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = -\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + C,$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C, \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + l \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + l \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + l \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + l \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = -\frac{1}{\sin x} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{3}{2} l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{3}{2} l \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

353. **Интегралы:** $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$ и $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx$.

Полагая, въ формулахъ (4) и (3) n⁰ 352, $m=n$, получимъ:

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \operatorname{cotg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x\,dx.$$

Къ этимъ же формуламъ приведутъ и слѣдующія преобразованія:

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \operatorname{cotg}^n x\,dx = \int \operatorname{cotg}^{n-2} x(1+\operatorname{cotg}^2 x)\,dx - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x\,dx =$$

$$= -\int \operatorname{cotg}^{n-2} x\,d\operatorname{cotg} x - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x\,dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x\,dx.$$

Примѣры:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x + C, \quad \int \operatorname{cotg}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x - x + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + l\cos x + C, \int \operatorname{cotg}^3 x\,dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} - l\sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$$

$$\int \operatorname{cotg}^4 x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + \operatorname{cotg} x + x + C$$

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - l\cos x + C$$

$$\int \operatorname{cotg}^5 x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} + l\sin x + C.$$

354. **Интегралы:** $\int f(\operatorname{tg} x)\,dx$ и $\int f\left(\operatorname{tg}(ax+b)\right)dx$.

$$\operatorname{tg} x = z,\ (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = dz,\ dx = \frac{dz}{1+z^2},$$

$$\int f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int \frac{f(z)}{1+z^2}\,dz.$$

Если f раціональная функція, то интегралъ приводится къ интегралу раціональной дроби.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ найдемъ интегралъ и при ирраціональномъ f.

Примѣры:

a) $$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1+\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}l(1+\operatorname{tg} x) - \frac{1}{2}l\cos x + \frac{1}{2}x + C$$

$$= \frac{x - l(\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

b) $$\int \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}\,dx = \frac{2}{3}(\operatorname{tg} x - 2)\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + C.$$

Интегралъ $\int f[\operatorname{tg}(ax+b)]dx$ положеніемъ: $\operatorname{tg}(ax+b) = z$ приводится къ $\frac{1}{a}\int \frac{f(z)\,dz}{1+z^2}$.

355. **Интегралы:**

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx \text{ и } \int f[\sin(ax+b), \cos(ax+b)]\,dx.$$

Для перваго:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z,\quad \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{2} = dz,\quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx = 2\int f\left(\frac{2z}{1 + z^2},\ \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right)\frac{dz}{1 + z^2}.$$

Для втораго:

$$\operatorname{tg}\frac{ax + b}{2} = z, \quad dx = \frac{2}{a}\cdot\frac{dz}{1 + z^2}$$

$$\sin(ax + b) = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos(ax + b) = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

$$\int f[\sin(ax + b),\ \cos(ax + b)]\,dx = \frac{2}{a}\int f\left(\frac{2z}{1 + z^2},\ \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right)\frac{dz}{1 + z^2}.$$

Если f выражаетъ раціональныя дѣйствія, то интегралы приведены къ интеграламъ раціональныхъ функцій.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ найдемъ эти интегралы и при ирраціональномъ f.

Примѣры:

a) $\int\frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = l\left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$

b) $\int\frac{1 + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{x}{2} + l\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)}l\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}\right) +$

$+ \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)}l\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}\right) + C.$

c) $\int\frac{\sin^3 x\cos x\,dx}{\sin x - \cos^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x}{2} - \sin x + \frac{1}{3}l(1 - \sin x) +$

$+ \frac{8}{3}l(2 + \sin x) + C.$

d) $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{1 + \sin x\cos x} = \frac{1}{2}l(1 + \sin x\cos x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1 + 2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}} + C.$

Въ примѣрѣ (*c*) при интегрированіи выгоднѣе сдѣлать положеніе: $\sin x = z$, а въ примѣрѣ (*d*): $\operatorname{tg}x = z$.

e) $\int \frac{dx}{1 + \sin(3x+1)} = -\frac{2}{3\left(1 + \operatorname{tg}\frac{3x+1}{2}\right)} + C.$

356. $$\int \sin ax \sin bx\, dx = \int \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{2} dx =$$
$$= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C$$
$$\int \sin ax \cos bx \cdot dx = \int \frac{\sin(a+b)x + \sin(a-b)x}{2} dx =$$
$$= -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C$$
$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \int \frac{\cos(a-b)x + \cos(a+b)x}{2} dx =$$
$$= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C.$$

b отлично отъ a и отъ $-a$; если же $b = a$, то:

$$\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$
$$\int \sin ax \cos ax\, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$$
$$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C.$$

Также найдемъ:

$$\int \sin(ax+\alpha)\sin(bx+\beta)\, dx = \frac{\sin[(a-b)x + \alpha - \beta]}{2(a-b)} -$$
$$- \frac{\sin[(a+b)x + \alpha + \beta]}{2(a+b)} + C$$
$$\int \sin(ax+\alpha)\cos(bx+\beta)\, dx = -\frac{\cos[(a+b)x + \alpha + \beta]}{2(a+b)} -$$
$$- \frac{\cos[(a-b)x + \alpha - \beta]}{2(a-b)} + C$$
$$\int \cos(ax+\alpha)\cos(bx+\beta)\, dx = \frac{\sin[(a-b)x + \alpha - \beta]}{2(a-b)} +$$
$$+ \frac{\sin[(a+b)x + \alpha + \beta]}{2(a+b)} + C,$$

b отлично отъ a и отъ $-a$; а при $b=a$:

$$\int \sin(ax+\alpha)\sin(ax+\beta)\,dx = \frac{x\cos(\alpha-\beta)}{2} - \frac{\sin(2ax+\alpha+\beta)}{4a} + C$$

$$\int \sin(ax+\alpha)\cos(ax+\beta)\,dx = \frac{x\sin(\alpha-\beta)}{2} - \frac{\cos(2ax+\alpha+\beta)}{4a} + C$$

$$\int \cos(ax+\alpha)\cos(ax+\beta)\,dx = \frac{x\cos(\alpha-\beta)}{2} + \frac{\sin(2ax+\alpha+\beta)}{4a} + C.$$

Интегралъ: $\int \sin^m(ax+\alpha)\sin^{m_1}(a_1x+\alpha_1)\dots\cos^n(bx+\beta)\cos^{n_1}(b_1x+\beta_1)\dots dx$, въ которомъ $m, m_1, \dots n, n_1, \dots$ цѣлыя положительныя числа, приведется къ интеграламъ первыхъ степеней синусовъ и косинусовъ выраженій вида $\gamma x+\delta$, — и поэтому найдется.

Примѣръ:

$$\int \sin^3 x\cos^2 5x\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left[-6\cos x + \frac{2\cos 3x}{3} - \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 9x}{3} - \frac{3\cos 11x}{11} + \frac{\cos 13x}{13}\right] + C.$$

357. $\int f(x)\cos ax\,dx = \int f(x)\,d\frac{\sin ax}{a} = \frac{f(x)}{a}\sin ax -$

$$-\frac{1}{a}\int f'(x)\sin ax\,dx$$

$$\int f(x)\sin ax\,dx = -\int f(x)\,d\frac{\cos ax}{a} = -\frac{f(x)}{a}\cos ax +$$

$$+\frac{1}{a}\int f'(x)\cos ax\,dx.$$

Эти интегралы найдемъ, если f цѣлая функція; они представятся подъ видомъ:

$$\int f(x)\cos ax\,dx = \varphi(x)\sin ax + \varphi_1(x)\cos ax + C$$

$$\int f(x)\sin ax\,dx = \xi(x)\cos ax + \xi_1(x)\sin ax + C,$$

гдѣ φ и ξ цѣлыя функціи одинаковой съ f степени, а φ_1 и ξ_1 цѣлыя же функціи одною степенью ниже, чѣмъ f. Ихъ можно найти какъ

послѣдовательнымъ интегрированіемъ по частямъ, такъ и по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Не трудно найти и слѣдующіе интегралы:

$$\int f(x)\cos(ax+\alpha)\,dx, \quad \int f(x)\sin(ax+\alpha)\,dx,$$

$$\int f(x)\sin^m(ax+\alpha)\sin^{m_1}(a_1x+\alpha_1)\ldots\cos^n(bx+\beta)\cos^{n_1}(b_1x+\beta_1)\ldots dx,$$

если f цѣлая функція, а m, n, m_1, n_1, ... цѣлыя положительныя числа.

Примѣры:

a) $$\int(4x^2-3x+1)\cos x\,dx = (4x^2-3x-7)\sin x + (8x-3)\cos x + C$$

b) $$\int(x^2+2x-1)\sin 3x\,dx = -\frac{9x^2+18x-11}{27}\cos 3x + \frac{2x+2}{9}\sin 3x + C$$

c) $$\int x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int x(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\,dx$$

$$= \frac{3x^2}{16} + \frac{x}{32}\sin 4x + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{128}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

d) $$\int x\cos^3 x\,dx = x\sin x - \frac{x}{3}\sin^3 x + \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{9}\cos^3 x + C.$$

e) $$\int x^2\sin^3 x\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}\int x^2(3\sin x - \sin 3x)\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int x^2(3\sin 3x - 4\sin x - \sin 5x)\,dx$$

$$= \frac{x^2-2}{2}\cos x - \frac{9x^2-2}{72}\cos 3x + \frac{25x^2-2}{1000}\cos 5x - x\sin x + \frac{x}{12}\sin 3x - \frac{x}{100}\sin 5x + C.$$

358. $$\int\frac{\sin x}{x^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\int\sin x\,d\frac{1}{x^{n-1}} = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1}\int \cos x\, d\frac{1}{x^{n-1}} = -\frac{\cos x}{(n-1)\, x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{x^{n-1}} dx$$

(n отличается отъ 1-цы).

Отсюда видимъ, что при n цѣломъ и положительномъ, превышающемъ 1-цу, *интегралы*:

$$\int \frac{\sin x}{x^n} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx$$

послѣдовательнымъ интегрированіемъ по частямъ приведутся къ слѣдующимъ простѣйшимъ:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos x}{x} dx,$$

а эти послѣдніе представляютъ особенныя функціи; изъ нихъ первую называютъ *интегральнымъ синусомъ*, а вторую — *интегральнымъ косинусомъ*.

359. Интегрированіемъ по частямъ находимъ:

$$\int a^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \frac{1}{\alpha\, la}\int \cos \beta x\, d(a^{\alpha x}) = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, la} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha\, la}\int a^{\alpha x} \sin \beta x\, dx$$

$$\int a^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = \frac{1}{\alpha\, la}\int \sin \beta x\, d(a^{\alpha x}) = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, la} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha\, la}\int a^{\alpha x} \cos \beta x\, dx;$$

а отсюда:

$$\int a^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \frac{a^{\alpha x} (\alpha\, la \cos \beta x + \beta \sin \beta x)}{(\alpha\, la)^2 + \beta^2} + C$$

$$\int a^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = \frac{a^{\alpha x} (\alpha\, la \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{(\alpha\, la)^2 + \beta^2} + C.$$

При $a = e$:

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$$

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C.$$

Эти формулы можно получить, при посредствѣ мнимыхъ выраженій, слѣдующимъ образомъ:

$$\int e^{(\alpha + \beta i)\, x} dx = \frac{e^{(\alpha + \beta i) x}}{\alpha + \beta i} + C.$$

Отдѣлимъ съ той и другой стороны знака равенства вещественную часть отъ мнимой:

$$\int e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)(\alpha - \beta i)}{(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)} + C_1 + C_{11} i$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx + i\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C_1 +$$

$$+ \left[\frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C_{11}\right] i.$$

Сравнивъ теперь вещественныя части и затѣмъ коэффиціенты при i, мы получимъ искомыя формулы.

Не трудно найти и слѣдующіе интегралы:

$$\int a^{\alpha x} P\,dx \quad \text{и} \quad \int f(x)\,a^{\alpha x} P\,dx,$$

гдѣ $P = \sin^m \alpha x \sin^{m_1} \alpha_1 x \ldots \cos^n \beta x \cos^{n_1} \beta_1 x \ldots$, а f цѣлая функція.

Примѣры:

a) $\int e^x \sin^3 x\,dx = \frac{e^x}{40}\left[15\sin x - 15\cos x - \sin 3x + 3\cos 3x\right] + C$

b) $\int x e^{-x}\cos 2x\,dx = \frac{e^{-x}}{25}\left[(10x+4)\sin 2x - (5x-3)\cos 2x\right] + C$

c) $\int x e^{-x}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{-x}}{2}\left[\frac{(10x+4)\sin 2x - (5x-3)\cos 2x}{25} - x - 1\right] + C.$

360. Найдемъ **интегралъ:**

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x}{\alpha\sin x + \beta\cos x}\,dx,$$

не прибѣгая къ общему пріему, т. е. преобразованію этого интеграла въ интегралъ раціональной функціи положеніемъ: $tg\,\frac{x}{2} = z$. Приведемъ знаменатель подъинтегральной функціи къ синусу угла; для этого найдемъ сперва такой уголъ φ, котораго косинусъ и синусъ были бы пропорціональны α и β:

$$\frac{\cos\varphi}{\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}};$$

тогда:

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{\alpha \sin x + \beta \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int \frac{a \sin x + b \cos x}{\sin (x + \varphi)} dx,$$

или полагая: $x + \varphi = z$, откуда $dx = dz$:

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{\alpha \sin x + \beta \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int \frac{a \sin (z - \varphi) + b \cos (z - \varphi)}{\sin z} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int [a \cos \varphi + b \sin \varphi + (b \cos \varphi - a \sin \varphi) \cot z] dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (a \cos \varphi + b \sin \varphi) z + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (b \cos \varphi - a \sin \varphi) l \sin z + C$$

$$= \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (x + \varphi) + \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2 + \beta^2} l \sin (x + \varphi) + C$$

$$= \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2} x + \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2 + \beta^2} l (\alpha \sin x + \beta \cos x) + C_1.$$

Другой выводъ. Положимъ:

$$\int \frac{\sin x \, dx}{\alpha \sin x + \beta \cos x} = M, \quad \int \frac{\cos x \, dx}{\alpha \sin x + \beta \cos x} = N;$$

тогда:

$$\alpha M + \beta N = \int dx = x + c_1$$

$$\alpha N - \beta M = \int \frac{\alpha \cos x - \beta \sin x}{\alpha \sin x + \beta \cos x} dx = l (\alpha \sin x + \beta \cos x) + C_{11}$$

$$M = \frac{\alpha x - \beta l (\alpha \sin x + \beta \cos x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C_1$$

$$N = \frac{\beta x + \alpha l (\alpha \sin x + \beta \cos x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C_{11}$$

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{\alpha \sin x + \beta \cos x} dx = a M + b N = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2} x +$$

$$+ \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2 + \beta^2} l (\alpha \sin x + \beta \cos x) + C.$$

Зная форму интеграла, можно было-бы, положивши:

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{\alpha \sin x + \beta \cos x} dx = Ax + B l (\alpha \sin x + \beta \cos x) + C,$$

искать A и B по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ:

$$A + \frac{B(\alpha\cos x - \beta\sin x)}{\alpha\sin x + \beta\cos x} = \frac{a\sin x + b\cos x}{\alpha\sin x + \beta\cos x}$$

$$(A\alpha - B\beta)\sin x + (A\beta + B\alpha)\cos x = a\sin x + b\cos x$$

$$\left.\begin{aligned} A\alpha - B\beta &= a \\ A\beta + B\alpha &= b \end{aligned}\right\} \quad A = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad B = \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Интегралы круговыхъ функцій.

361. Простѣйшіе интегралы:

$$\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx = x\operatorname{arc\,sin} x - \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx = x\operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x\operatorname{arc\,tg} x - \int\frac{x\,dx}{x^2+1} = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}l(x^2+1) + C$$

$$\int \operatorname{arc\,cotg} x\,dx = x\operatorname{arc\,cotg} x + \frac{1}{2}l(x^2+1) + C$$

$$\int \operatorname{arc\,sec} x\,dx = x\operatorname{arc\,sec} x - \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = x\operatorname{arc\,sec} x -$$

$$- l\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C \quad (x>0)$$

$$\int \operatorname{arc\,cosec} x\,dx = x\operatorname{arc\,cosec} x + l(x + \sqrt{x^2-1}) + C \quad (x>0)$$

362. $$\int(\operatorname{arc\,sin} x)^n dx = x(\operatorname{arc\,sin} x)^n - n\int x(\operatorname{arc\,sin} x)^{n-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x(\operatorname{arc\,sin} x)^n + n\int(\operatorname{arc\,sin} x)^{n-1} d\sqrt{1-x^2} =$$

$$= x(\operatorname{arc\,sin} x)^n + n(\operatorname{arc\,sin} x)^{n-1}\sqrt{1-x^2} -$$

$$- n(n-1)\int(\operatorname{arc\,sin} x)^{n-2} dx.$$

$$\int(\operatorname{arc\,cos} x)^n dx = x(\operatorname{arc\,cos} x)^n - n(\operatorname{arc\,cos} x)^{n-1}\sqrt{1-x^2} -$$

$$- n(n-1)\int(\operatorname{arc\,cos} x)^{n-2} dx.$$

Вообще легко найдутся интегралы: $\int f(\arcsin x)\,dx$ и $\int f(\arccos x)\,dx$, если f цѣлая функція.

Примѣръ:

$$\int [2(\arcsin x)^3 - 5(\arcsin x)^2 + \arcsin x - 1]\,dx =$$

$$= [2(\arcsin x)^3 - 5(\arcsin x)^2 - 11 \arcsin x + 9]\,x +$$

$$+ [6(\arcsin x)^2 - 10 \arcsin x - 11]\sqrt{1-x^2} + C.$$

Интегралы:

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int \frac{f(\operatorname{arc\,tg} x)}{x^2+1}\,dx,$$

$$\int \frac{f(\operatorname{arc\,cotg} x)}{x^2+1}\,dx, \quad \int \frac{f(\operatorname{arc\,sec} x)}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx, \quad \int \frac{f(\operatorname{arc\,cosec} x)}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

приводятся къ интеграламъ раціональныхъ функцій при раціональномъ f, и иногда могутъ быть найдены и въ случаѣ ирраціональнаго f.

Примѣры:

a) $$\int \frac{(\arcsin x)^2 - 5\arcsin x + 1}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{5}{\arcsin x} - \frac{1}{2(\arcsin x)^2} +$$

$$+ l \arcsin x + C$$

b) $$\int \frac{[(\operatorname{arc\,tg} x)^2 + 1]\,dx}{(x^2+1)[(\operatorname{arc\,tg} x)^3 + 2\operatorname{arc\,tg} x]} = \frac{1}{4}\, l\,[(\operatorname{arc\,tg} x)^4 + 2(\operatorname{arc\,tg} x)^2] + C$$

c) $$\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^7 \sqrt[5]{[2(\operatorname{arc\,tg} x)^4 + 1]^2}}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{5}{1344}\Big[28(\operatorname{arc\,tg} x)^8 + 4(\operatorname{arc\,tg} x)^4 - 5\Big]\sqrt[5]{[2(\operatorname{arc\,tg} x)^4 + 1]^2} + C.$$

363. **Интегралъ:** $\int f(x)\cdot \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ (f цѣлая функція).

Пусть: $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$; тогда: $f(x)\,dx = d\varphi(x)$,

$$\int f(x)\cdot \operatorname{arc\,tg} x \cdot dx = \int \operatorname{arc\,tg} x \cdot d\varphi(x) = \varphi(x)\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{\varphi(x)}{x^2+1}\,dx.$$

Послѣдній интегралъ найдемъ, такъ какъ $\varphi(x)$ цѣлая функція.

Примѣръ:

$$\int (x^2 + 3x - 1)\operatorname{arctg} x\, dx = -\frac{x^2+9x}{6} + \frac{2x^3+9x^2-6x+9}{6}\operatorname{arctg} x +$$

$$+ \frac{2}{3} l(x^2 + 1) + C.$$

Интегралъ: $\int x^{2k-1} (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, dx.$

$$\int x^{2k-1} (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, dx = \int (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, d\frac{x^{2k}+a}{2k}$$

$$= \frac{x^{2k}+a}{2k} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{1}{k}\int \frac{x^{2k}+a}{x^2+1} \operatorname{arc\,tg} x\, dx:$$

Постоянное число a произвольно. Его можно выбрать такъ, чтобы $x^{2k}+a$ дѣлилось на цѣло на x^2+1.

Для этого возьмемъ $a=1$, когда k нечетное, и $a=-1$, когда k четное, вообще стало быть: $a=(-1)^{k-1}$. Тогда, обозначая частное отъ дѣленія $x^{2k}+(-1)^{k-1}$ на x^2+1 чрезъ $\psi(x)$, получимъ:

$$\int x^{2k-1} (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, dx = \frac{x^{2k}+(-1)^{k-1}}{2k} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{1}{k}\int \psi(x) \operatorname{arc\,tg} x\, dx;$$

а какъ найти $\int \psi(x) \operatorname{arc\,tg} x$, мы знаемъ.

Вообще мы въ состояніи найти интегралъ:

$$\int f(x) (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, dx,$$

если $f(x)$ цѣлая нечетная функція, т. е. функція вида:

$$Ax^{2k-1} + Bx^{2k-3} + \ldots + Px^5 + Qx^3 + Rx.$$

Примѣры:

a) $$\int x (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, dx = \frac{x^2+1}{2} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 - x \operatorname{arc\,tg} x +$$

$$+ \frac{1}{2} l(x^2+1) + C.$$

b) $$\int x^3 (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, dx = \frac{x^4-1}{4} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{x^3-3x}{6} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x^2}{12} -$$

$$- \frac{1}{3} l(x^2+1) + C.$$

c) $\int x^5 (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, dx = \frac{x^6+1}{6} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{3x^5-5x^3+15x}{45} \operatorname{arc\,tg} x +$

$+ \frac{3x^4-16x^2}{180} + \frac{23}{90}\, l\,(x^2+1) + C.$

d) $\int (5x^3 - 7x)(\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx = \int (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, d\,\frac{5x^4-14x^2-19}{4} =$ *)

$= \frac{5x^4-14x^2-19}{4} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{1}{2}\int (5x^2 - 19) \operatorname{arc\,tg} x\, dx =$

$= \frac{5x^4-14x^2-19}{4} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{5x^3-57x}{6} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{5x^2}{12} -$

$- \frac{31}{6}\, l\,(x^2+1) + C.$

364. Интегралы:

$$\int f(x) \arcsin x\, dx, \quad \int f(x) \arccos x\, dx, \quad \int \operatorname{arc\,tg} [\varphi(x)]\, dx,$$

$$\int f(x) \operatorname{arc\,tg} [\varphi(x)]\, dx, \quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} \varphi(x)}{(x+a)^n}\, dx$$

легко найдутся, если въ нихъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ раціональныя функціи, и при томъ f цѣлая, а n постоянное число, разнящееся отъ 1-цы.

Въ частныхъ случаяхъ найдемъ и при ирраціональныхъ f или φ.

Примѣры:

a) $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} (x+1)\, dx = \frac{x^3-2}{3} \operatorname{arc\,tg} (x+1) - \frac{x^2-4x}{6} -$

$- \frac{1}{3}\, l\,(x^2+2x+2) + C.$

b) $\int (x^2 - 2x - 1) \arcsin x\, dx = \frac{2x^3-6x^2-6x+3}{6} \arcsin x +$

$+ \frac{2x^2-9x-14}{18} \sqrt{1-x^2} + C.$

---

*) Интегралъ произведенія $(5x^3 - 7x)\, dx$ есть $\frac{5x^4-14x^2+a}{4}$; постоянное произвольное a выбираемъ такъ, чтобы функція $5x^4-14x^2+a$ дѣлилась на цѣло на x^2+1, другими словами, чтобы i было ея корнемъ, т. е. $5i^4-14i^2+a=0$, откуда: $a = -19$. Или: раздѣлимъ $5x^4 - 14x^2 + a$ на x^2+1 и приравняемъ остатокъ нолю, откуда и найдемъ: $a = -19$.

c) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} 2x}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{\operatorname{arc\,tg} 2x}{x+1} + \frac{1}{5}\, l\,\frac{(x+1)^2}{4x^2+1} + \frac{4}{5}\operatorname{arc\,tg} 2x + C.$

d) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 3\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \frac{3}{4}\, l\,(x^2+1) + \frac{9}{4}\, l\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right) -$

$- \frac{3\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt{3}} + C.$

e) $\int \operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{x}\,dx = x\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{x} + \frac{1}{4}\, l\,(2x^2+2x+1) -$

$- \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2x+1) + C.$

f) $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\cdot dx = (x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$

ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

365. Пусть: $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C.$

Интегралъ этотъ, пока въ немъ C произвольно, неопредѣленный. Онъ удовлетворяетъ одному условію: производная его относительно x равна $f(x)$. Подчинимъ его еще другому условію: чтобы онъ при $x = x_0$ обращался въ 0; тогда C приметъ опредѣленное значеніе, удовлетворяющее уравненію:

$$\varphi(x_0) + C = 0\,,$$

откуда: $C = -\varphi(x_0)$, и по этому интегралъ выразится разностью: $\varphi(x) - \varphi(x_0)$. Тогда его называютъ *интеграломъ въ предѣлахъ отъ x_0 до x* и обозначаютъ такъ: $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$.

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Стало быть: $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ *есть такая функція, производная которой по x равна $f(x)$, и которая уничтожается при $x = x_0$.*

Примѣры:

$$\int_1^x 3x^2\,dx = x^3 - 1\,,\quad \int_0^x \sin x\,dx = 1 - \cos x\,,$$

$$\int_0^x e^x\,dx = e^x - 1\,,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x\,,\quad \int_1^x \frac{dx}{x} = lx\,,\quad \int_1^x \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x} - 3.$$

Частное значеніе интеграла $\int_{x_0}^x f(x)\,dx$, отвѣчающее $x = x_1$, называютъ *опредѣленнымъ интеграломъ*, или *интеграломъ въ предѣлахъ отъ* x_0 до x_1. Обозначаютъ его чрезъ: $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \left[\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right]_{x=x_1} = \Big[\varphi(x) - \varphi(x_0)\Big]_{x=x_1} = \varphi(x_1) - \varphi(x_0).$$

Онъ не зависитъ отъ x, и потому производная его по x равна 0; а зависитъ отъ свойства подъинтегральной функціи и отъ предѣловъ интеграла. Его можно получить изъ неопредѣленнаго интеграла, подставляя въ послѣднемъ вмѣсто x верхній предѣлъ, потомъ нижній, и вычитая второй результатъ подстановки изъ перваго. При этомъ можно не обращать вниманія на постоянное C, потому что оно при вычитаніи сокращается.

Примѣры:

$$\int_1^2 3x^2\,dx = (x^3 + C)_2 - (x^3 + C)_1 = 8 + C - (1 + C) = 7$$

$$\int_1^2 3x^2\,dx = (x^3)_2 - (x^3)_1 = 8 - 1 = 7.$$

$$\int_1^2 3x^2\,dx = \left[\int_1^x 3x^2\,dx\right]_{x=2} = (x^3 - 1)_2 = 7$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = (-\cos x)_\pi - (-\cos x)_0 = 1 + 1 = 2$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = (1 - \cos x)_\pi = 2$$

$$\int_1^5 dx = 4\,, \quad \int_1^3 \frac{dx}{x^3} = \frac{4}{9}\,, \quad \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,,$$

$$\int_8^{10} \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{10} - 2 = 0{,}1544\ \ldots,$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = l2 = 0{,}6931\ \ldots, \quad \int_0^1 e^x\,dx = e - 1 = 1{,}71828\ \ldots,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 1\,,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sqrt{2} - 1 = 0{,}4142\ \ldots,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6} = 0{,}5235988 \quad \text{(приблиз.)}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = 1{,}285398\ \ldots,$$

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} \cdot dx = \frac{\pi}{2} - 1 = 0{,}570796\ \ldots$$

Такъ какъ опредѣленный интегралъ не зависитъ отъ той перемѣнной, которая стоитъ подъ знакомъ интеграла, то мы можемъ эту перемѣнную замѣнить и другою буквою, не измѣняя этимъ интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(y)\,dy = \int_{x_0}^{x_1} f(z)\,dz = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt.$$

Въ интегралѣ $\int_{x_0}$[redacted]$f(x)\,dx$, хотя онъ и зависитъ отъ x, мы мо-

жемъ также подъ знакомъ интеграла букву x замѣнить другою, если только предѣлы интеграла оставимъ безъ измѣненія:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

По этому и интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, если замѣнимъ въ немъ букву x подъ знакомъ интеграла другою, можемъ разсматривать какъ опредѣленный. Представивши его напр. подъ видомъ $\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$, мы можемъ сказать, что онъ есть значеніе интеграла $\int_{x_0}^{z} f(z)\,dz$ при $z = x$, и производная его по z, какъ величины, независящей отъ z, равна 0.

Неопредѣленный интегралъ можно также представить опредѣленнымъ, съ добавленіемъ къ послѣднему постоянной произвольной; дѣйствительно: такъ какъ:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

$$\int f(z)\,dz = \varphi(z) + C_1.$$

$$\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz = \varphi(x) - \varphi(x_0),$$

то:

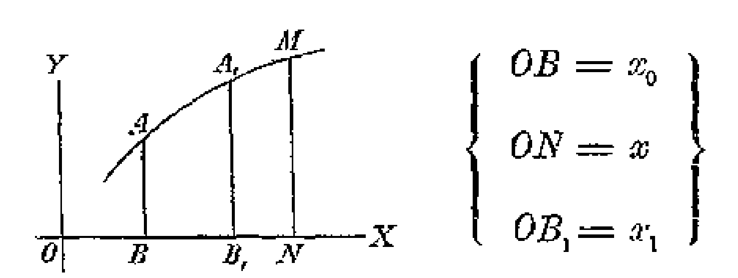
$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(x_0) + C + \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz + C + \varphi(x_0).$$

Сумма $C + \varphi(x_0)$ величина постоянная, но произвольная; обозначая ее чрезъ C_{11}, имѣемъ:

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz + C_{11}.$$

Геометрически интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ можно разсматривать,

какъ *площадь, ограниченную кривою* AM, *которой уравненіе относительно прямоугольныхъ осей* OX *и* OY *есть* $y = f(x)$, *осью* OX *и двумя ординатами* AB *и* MN, *изъ которыхъ первая соотвѣтствуетъ постоянной абсциссѣ* x_0, *а вторая — перемѣнной* x.



$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ выражаетъ *площадь между тою же кривою, осью* OX *и двумя ординатами* AB *и* A_1B_1, *соотвѣтствующими постояннымъ абсциссамъ* x_0 *и* x_1.

366. Интегралъ суммы и разности. Пусть:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x),\ \int f_1(x)\,dx = \varphi_1(x),\ \int [f(x) + f_1(x)]\,dx = \psi(x)\ ^{*)}.$$

Мы знаемъ, что:

$$\int [f(x) + f_1(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int f_1(x)\,dx + C,$$

т. е.:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) + C;$$

по этому:

$$\psi(x_1) = \varphi(x_1) + \varphi_1(x_1) + C$$

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0) + \varphi_1(x_0) + C$$

$$\psi(x_1) - \psi(x_0) = \varphi(x_1) - \varphi(x_0) + \varphi_1(x_1) - \varphi_1(x_0).$$

Разности: $\psi(x_1) - \psi(x_0)$, $\varphi(x_1) - \varphi(x_0)$, $\varphi_1(x_1) - \varphi_1(x_0)$ представляютъ опредѣленные интегралы:

---

*) Въ функціи $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi(x)$ включены и постоянныя произвольныя.

$$\int_{x_0}^{x_1} [f(x) + f_1(x)]\, dx\,, \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx\,, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\, dx\,;$$

слѣдовательно:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f(x) + f_1(x)]\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\, dx\,,$$

т. е. *интегралъ суммы двухъ функцій, взятый въ предѣлахъ, равенъ суммѣ интеграловъ этихъ функцій въ тѣхъ же предѣлахъ.*

Также докажется, что:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f(x) - f_1(x)]\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\, dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [f(x) + f_1(x) + f_{11}(x)]\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} f_{11}(x)\, dx\,,$$

и вообще для всякаго опредѣленнаго числа слагаемыхъ: *интегралъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ въ тѣхъ же предѣлахъ.* Подъинтегральныя функціи предполагаются сплошными въ предѣлахъ интегрированій.

367. Интегралъ произведенія функціи на постоянное число.

Пусть: $\int f(x)\, dx = \varphi(x)$, $\int a f(x)\, dx = \xi(x)$ (a пост.);

тогда:

$$\xi(x) = a\varphi(x) + C$$

$$\xi(x_1) = a\varphi(x_1) + C$$

$$\xi(x_0) = a\varphi(x_0) + C,$$

откуда:

$$\xi(x_1) - \xi(x_0) = a[\varphi(x_1) - \varphi(x_0)]\,;$$

или:

$$\int_{x_0}^{x_1} a f(x)\, dx = a\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx\,,$$

т. е. *въ предѣлахъ взятый интегралъ произведенія функціи на постоянное число равенъ произведенію постояннаго числа на интегралъ функціи въ тѣхъ же предѣлахъ.*

Опираясь на эту теорему, мы можемъ постоянный множитель, стоящій внѣ интеграла, вносить подъ знакъ интеграла, и наоборотъ.

368. Замѣненіе перемѣнной подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла *влечетъ за собою измѣненіе предѣловъ интеграла.* Новые предѣлы найдутся изъ уравненія, связывающаго прежнюю перемѣнную съ новою. Пусть это уравненіе (сохраняемъ обозначенія n⁰ 321): $\varphi(x) = z$, или: $x = \xi(z)$ (ξ функція, обратная φ); тогда, обозначая новые предѣлы, соотвѣтствующія прежнимъ x_0 и x_1, чрезъ z_0 и z_1, получимъ:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi(z))\,\xi'(z)\,dz. \qquad \left(\begin{matrix} z_0 = \varphi(x_0) \\ z_1 = \varphi(x_1) \end{matrix}\right)$$

Что два послѣдніе интеграла одинаковы, видно изъ слѣдующаго: если неопредѣленный интегралъ разсматриваемой функціи, выраженный въ z, есть $F(z) + C$, то въ x онъ будетъ: $F(\varphi(x)) + C$; слѣдовательно:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi(z))\,\xi'(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) = F(\varphi(x_1)) - F(\varphi(x_0))$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(\varphi(x_1)) - F(\varphi(x_0)).$$

Примѣры:

a) Полагая: $\sin x = z$, откуда: $\cos x\,dx = dz$, имѣемъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x\,dx = \int_0^1 z^3(1 - z^2)\,dz = \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{6}\right)_1 - \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{6}\right)_0 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

b) Полагая: $\sqrt{x^2 + 1} = z$, имѣемъ:

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_1^{\sqrt{2}} (z^2 - 1)\,dz = \left(\frac{z^3}{3} - z\right)_{\sqrt{2}} - \left(\frac{z^3}{3} - z\right)_1 =$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{3} = 0{,}19526\ldots$$

Разность двухъ значеній функціи $\psi(x)$, отвѣчающихъ значеніямъ x_1 и x_0 перемѣнной, т. е. разность $\psi(x_1)-\psi(x_0)$, изображаютъ обыкновенно такъ: $\Big[\psi(x)\Big]_{x_0}^{x_1}$; по этому, если неопредѣленный интегралъ $f(x)\,dx$ есть $\psi(x)+C$, то:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \Big[\psi(x)\Big]_{x_0}^{x_1}.$$

Такъ и въ приведенныхъ примѣрахъ разности $\left(\frac{z^4}{4}-\frac{z^6}{6}\right)_1 - \left(\frac{z^4}{4}-\frac{z^6}{6}\right)_0$ и $\left(\frac{z^3}{3}-z\right)_{\sqrt{2}}-\left(\frac{z^3}{3}-z\right)_1$ можно было бы представить короче чрезъ: $\left(\frac{z^4}{4}-\frac{z^6}{6}\right)_0^1$ и $\left(\frac{z^3}{3}-z\right)_1^{\sqrt{2}}$. Далѣе будемъ держаться такого обозначенія.

379. Формула интегрированія по частямъ.

Интегралъ дифференціала произведенія двухъ функцій x (одну обозначимъ чрезъ p, другую чрезъ q), взятый въ предѣлахъ отъ x_0 до x_1, даетъ:

$$\int_{x_0}^{x_1} d(pq) = (pq)_{x_1} - (pq)_{x_0} = (pq)_{x_0}^{x_1};$$

но съ другой стороны:

$$\int_{x_0}^{x_1} d(pq) = \int_{x_0}^{x_1} (pdq + qdp) = \int_{x_0}^{x_1} pdq + \int_{x_0}^{x_1} qdp;$$

слѣдовательно:

$$\int_{x_0}^{x_1} pdq + \int_{x_0}^{x_1} qdp = (pq)_{x_0}^{x_1},$$

откуда:

$$\int_{x_0}^{x_1} pdq = (pq)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} qdp.$$

Такой видъ принимаетъ *формула интегрированія по частямъ въ примѣненіи къ интегралу опредѣлённому.*

Примѣры:

a) $$\int_0^1 l(1+x^2)\,dx = \Big[x\,l(1+x^2)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} =$$

$$= l2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= l2 - 2 + \frac{\pi}{2} = 0{,}26394\ \ldots.$$

b) $$\int_0^1 x \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,d\frac{x^2+1}{2} = \Big[\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\Big]_0^1 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = 0{,}285398\ \ldots.$$

c) $$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = \int_0^\pi x^2\,d\sin x = \Big(x^2\sin x\Big)_0^\pi - 2\int_0^\pi x\sin x\,dx,$$

$$\Big(x^2\sin x\Big)_0^\pi = 0, \quad -\int_0^\pi x\sin x\,dx = \int_0^\pi x\,d\cos x = \Big(x\cos x\Big)_0^\pi -$$

$$-\int_0^\pi \cos x\,dx = \pi\cos\pi,$$

$$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = 2\pi\cos\pi = -2\pi = -6{,}283185\ \ldots.$$

d) $$\int_1^e \frac{lx\,dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\int_1^e lx\,d\sqrt[3]{x} = 3\Big(lx\sqrt[3]{x}\Big)_1^e - 3\int_1^e \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= 3\sqrt[3]{e} - 9\Big(\sqrt[3]{e} - 1\Big) = 9 - 6\sqrt[3]{e} = 0{,}6263\ldots.$$

370. Интегралы: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

Дадимъ произведенію $\cos^n x\,dx$ видъ: $\cos^{n-1} x \cdot d\sin x$, и проинтегрируемъ его по частямъ между предѣлами 0 и $\frac{\pi}{2}$; получимъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,d\sin x = \left(\cos^{n-1} x \cdot \sin x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx;$$

а такъ какъ: $\left(\cos^{n-1} x \sin x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$ то:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx,$$

откуда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx.$$

Также нашли бы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx.$$

Обозначимъ интегралъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ чрезъ p_n; тогда:

$$p_n = \frac{n-1}{n} p_{n-2}, \quad p_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} p_{n-4}, \ldots, \quad p_{n-2k+2} = \frac{n-2k+1}{n-2k+2} p_{n-2k}.$$

Перемножая и сокращая, получимъ:

$$p_n = \frac{(n-2k+1)\ldots(n-3)(n-1)}{(n-2k+2)\ldots(n-2)n} p_{n-2k}.$$

Различимъ два случая: n четное число и n нечетное. Подставимъ вмѣсто n сначала $2k$, потомъ: $2k+1$.

$$p_{2k} = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots2k} p_0$$

$$p_{2k+1} = \frac{2.4.6\ldots2k}{3.5.7\ldots(2k+1)} p_1.$$

Теперь найдемъ p_0 и p_1:

$$p_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \left(x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$p_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \left(\sin x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

И такъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x\, dx = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} x\, dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)}.$$

Также нашли бы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)}.$$

Подставляя на мѣсто k послѣдовательно числа: $1, 2, 3, \ldots$, получимъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx = \frac{1.3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx = \frac{2.4}{3.5} = \frac{8}{15}$$

и т. д.

371. Пусть: $\int f(x)\, dx = \varphi(x) + C$; тогда:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a), \quad \int_b^a f(x)\, dx = \varphi(a) - \varphi(b);$$

а отсюда:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,;$$

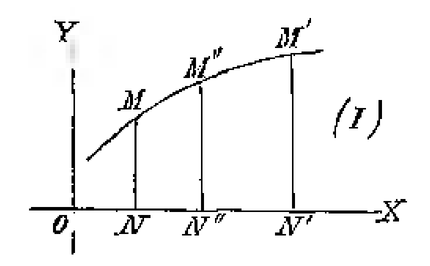
стало-быть *интегралъ отъ перестановки его предѣловъ, сохраняя абсолютную величину, измѣняетъ только знакъ.*

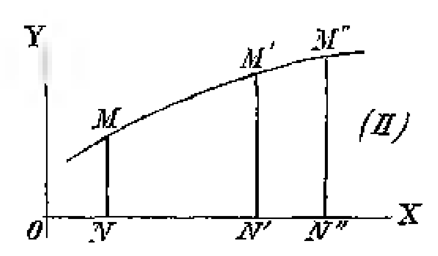
372. **Интегралъ** $\int_a^b f(x)\,dx$ **можно разложить на два слѣдующимъ** образомъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

предполагая функцію f сплошною въ предѣлахъ каждаго изъ этихъ интеграловъ. Для доказательства представимъ послѣдніе два интеграла разностями: $\varphi(c) - \varphi(a)$ и $\varphi(b) - \varphi(c)$; складывая эти разности, получимъ: $\varphi(b) - \varphi(a)$, т. е. интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$. Число c можетъ и не заключаться между предѣлами a и b.

Разложеніе это подтвердимъ геометрически: начертимъ кривую: $y = f(x)$ при осяхъ прямоугольныхъ; если ординаты MN, $M'N'$





и $M''N''$ соотвѣтствуютъ абсциссамъ: $ON = a$, $ON' = b$ и $ON'' = c$, то въ случаѣ: $a < c < b$ имѣемъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{площ. } MNN'M' = \text{пл. } MNN''M'' + \text{пл. } M''N''N'M' =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \text{ (черт. I)};$$

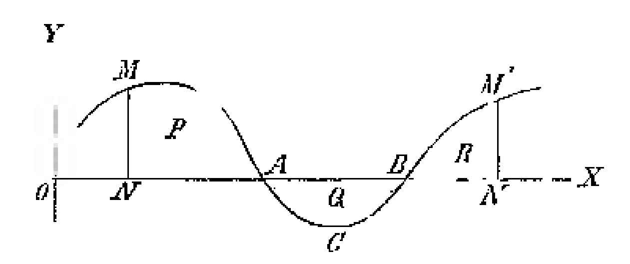
въ случаѣ же: $a < b < c$:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{пл. } MNN'M' = \text{пл. } MNN''M'' - \text{пл. } M'N'N''M'' =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \text{ (черт II).}$$

Алгебрическая сумма $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx$ представляетъ ариометически въ первомъ случаѣ сумму, а во второмъ — разность.

Разсматривая опредѣленный интегралъ, какъ площадь, мы чертили кривую надъ осью OX, и по этому считали ординаты точекъ кривой всѣ положительными. Если же кривая пересѣкаетъ ось OX, и стало-быть находится частію надъ OX, а частію подъ OX, то площади, находящіеся подъ осью OX, придется считать величинами отрицательными. Такъ, если кривая MCM', соотвѣтствующая функціи $f(x)$, пересѣкаетъ ось OX въ точкахъ A и B, и если площади: MNA, ACB и $BN'M'$, понимая ихъ въ смыслѣ количествъ положительныхъ, выразимъ чрезъ P, Q и R, то интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$, предполагая $ON = a$, $ON' = b$, представится трехчленомъ: $P - Q + R$.



Вообще: считая площади и надъ, и подъ осью OX величинами положительными, мы можемъ сказать, что если кривая на пути x отъ a до b пересѣкаетъ ось OX нѣсколько разъ, то интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$ равенъ разности между суммою площадей, находящихся надъ OX, и суммою площадей подъ OX.

Отъ разложенія интеграла на два легко перейти къ разложенію его на три, четыре и вообще на какое угодно число интеграловъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx + \ldots .$$

$$\ldots . + \int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} f(x)\,dx + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

Числа: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, могутъ и не заключаться между a и b, лишь-бы функція f сохраняла сплошность между предѣлами каждаго изъ интеграловъ.

373. **Опредѣленный интегралъ, разсматриваемый какъ предѣлъ суммы.** Пусть въ послѣднемъ разложеніи числа: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ заключаются между a и b, и при томъ удовлетворяютъ, въ случаѣ $a < b$, неравенствамъ:

$$a < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots . < a_{n-2} < a_{n-1} < b,$$

а въ случаѣ $a > b$, неравенствамъ:

$$a > a_1 > a_2 > a_3 > \ldots . > a_{n-2} > a_{n-1} > b.$$

Разности: $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, ..., $a_{n-1} - a_{n-2}$, $b - a_{n-1}$, которыя обозначимъ чрезъ: Δa, Δa_1, Δa_2, ..., Δa_{n-2}, Δa_{n-1}, можно разсматривать, какъ приращенія перемѣнной x, измѣняющейся отъ a до b, и принимающей при этомъ послѣдовательно значенія: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, b$. Эти приращенія —положительныя, когда $a < b$, и отрицательныя, когда $a > b$.

Разумѣя подъ $\varphi(x)$, какъ и прежде, такую сплошную функцію, производная которой есть $f(x)$, имѣемъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = \varphi(a_1) - \varphi(a) = \frac{\varphi(a+\Delta a) - \varphi(a)}{\Delta a}\Delta a.$$

Съ приближеніемъ a_1 къ a, отношеніе $\frac{\varphi(a+\Delta a) - \varphi(a)}{\Delta a}$ стремится къ $\varphi'(a)$, или, что все равно, къ $f(a)$; по этому, обозначая разность:

$$\frac{\varphi(a+\Delta a) - \varphi(a)}{\Delta a} - f(a),$$

которая стремится къ 0 вмѣстѣ съ Δa, чрезъ ω, получимъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = \Big[f(a) + \omega\Big]\Delta a.$$

По той же причинѣ:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = \Big[f(a_1) + \omega_1\Big]\Delta a_1$$

$$\int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx = \Big[f(a_2) + \omega_2\Big]\Delta a_2$$

. . . .

. . . .

$$\int_{a_{n-1}}^{b} f(x)\,dx = \Big[f(a_{n-1}) + \omega_{n-1}\Big]\Delta a_{n-1},$$

гдѣ количества ω_1, ω_2, ..., ω_{n-1} стремятся каждое къ 0, первое вмѣстѣ съ Δa_1, второе съ Δa_2, и т. д., наконецъ послѣднее вмѣстѣ съ Δa_{n-1}.

Складывая эти равенства, и обозначая при этомъ суммы:

$$f(a)\Delta a + f(a_1)\Delta a_1 + f(a_2)\Delta a_2 + \ldots + f(a_{n-1})\Delta a_{n-1}$$

$$\omega\Delta a + \omega_1\Delta a_1 + \omega_2\Delta a_2 + \ldots + \omega_{n-1}\Delta a_{n-1}$$

чрезъ $\sum\limits_0^{n-1} f(a_k)\Delta a_k$ и $\sum\limits_0^{n-1} \omega_k\Delta a_k$, получимъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_0^{n-1} f(a_k)\Delta a_k + \sum_0^{n-1} \omega_k\Delta a_k.$$

Въ каждой изъ послѣднихъ суммъ n членовъ. Это число членовъ увеличивается съ приближеніемъ приращеній Δa, Δa_1, Δa_2, ... къ 0.

При этомъ вторая сумма стремится къ 0, потому что ее можно разсматривать заключающеюся между произведеніями: $\omega'(b-a)$ и $\omega''(b-a)$ *), гдѣ одинъ изъ множителей ω' и ω'' есть наибольшее изъ

*) Сумма: $\Delta a + \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_{n-1}$ равна $b-a$, величинѣ постоянной.

количествъ: ω, ω_1, ω_2, ..., ω_{n-1}, а другой — наименьшее; а такъ какъ каждое изъ нихъ стремится къ 0, то:

$$\text{пред.}\ [\omega'(b-a)] = 0\,,\ \ \text{пред.}\ [\omega''(b-a)] = 0\,,$$

и слѣдовательно:

$$\text{пред.}\ \sum_{0}^{n-1} \omega_k \Delta a_k = 0;$$

по этому:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{пред.}\ \sum_{0}^{n-1} f(a_k)\,\Delta a_k.$$

Каждый членъ суммы $\sum_{0}^{n-1} f(a_k)\Delta a_k$ можно разсматривать, какъ значеніе произведенія $f(x)\,\Delta x$; стало-быть послѣднему равенству можно дать видъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{пред.}\ \sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x.$$

Отсюда видимъ, что *интегралъ* $\int_a^b f(x)\,dx$ *можно разсматривать, какъ предѣлъ, къ которому стремится сумма значеній подъинтегральной функціи* $f(x)\,dx$, *при измѣненіи* x *отъ* a *до* b *).

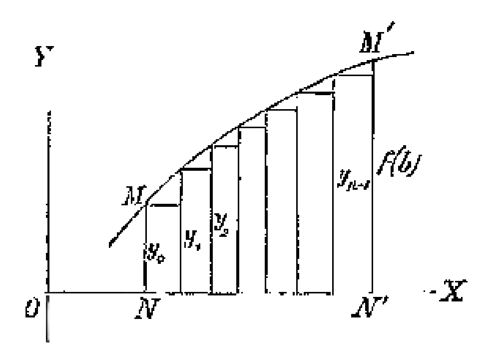
Предѣлъ этотъ не зависитъ отъ закона, которому слѣдуютъ принимаемыя x-омъ значенія: a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}; при этомъ требуется только, чтобы съ возрастаніемъ n каждая изъ разностей $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, ..., $b - a_{n-1}$, т. е. каждое Δx, стремилась къ 0; разности эти, подходя къ 0, могутъ быть какъ равными между собою, такъ и не равными.

Чтобы подтвердить выведенное геометрически, построимъ кривую: $y = f(x)$, и проведемъ ординаты: y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, $f(b)$, соотвѣтствующія абсциссамъ: a, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, b, такъ что:

---

*) При этомъ dx принимается за приращеніе x.

$MN = y_0 = f(a)$, $y_1 = f(a_1)$, $y_2 = f(a_2)$, . . , $y_{n-1} = f(a_{n-1})$, $M'N' = f(b)$; тогда:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{площ. } MNN'M' = y_0 \Delta a + y_1 \Delta a_1 + y_2 \Delta a_2 + \ldots$$
$$\ldots + y_{n-1} \Delta a_{n-1} + \varepsilon,$$

гдѣ: $\varepsilon = \theta_0 (y_1 - y_0) \Delta a + \theta_1 (y_2 - y_1) \Delta a_1 + \theta_2 (y_3 - y_2) \Delta a_2 + \ldots$
$$\ldots + \theta_{n-1} \left(f(b) - y_{n-1}\right) \Delta a_{n-1}$$

(множители θ_0, θ_1, θ_2, ..., θ_{n-1} заключаются каждый между 0 и 1)

Не трудно видѣть, что ε стремится къ 0; и потому:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{пред. } \sum_0^{n-1} y_k \Delta a_k = \text{пред. } \sum_a^b f(x) \Delta x.$$

На чертежѣ ординаты кривой ростутъ съ возрастаніемъ x отъ a до b, и кривая обращена выпуклостью въ сторону положительныхъ ординатъ; но тоже заключеніе получили-бы и въ случаѣ уменьшенія ординатъ, какъ при выпуклости, такъ и при вогнутости кривой.

Для поясненія послѣдней теоремы на частномъ примѣрѣ, найдемъ интегралъ $\int_1^3 x^2\,dx$, разсматривая его, какъ предѣлъ суммы $\sum_1^3 x^2 \Delta x$, при измѣненіи x между 1 и 3. Чтобы удобнѣе складывать элементы $x^2 \Delta x$, будемъ считать приращенія x одинаковыми, такъ что, обозначая каждое Δx чрезъ h, получимъ:

$$\Delta x = h = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \text{ откуда: } nh = 2,$$

и тогда:

$$\sum_1^3 x^2 \Delta x = 1^2 \cdot h + (1+h)^2 h + (1+2h)^2 h + (1+3h)^2 h + \ldots$$

$$\ldots + (1+(n-1)h)^2 h$$

$$= nh + 2h^2 [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] +$$

$$+ h^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2]$$

$$= nh + nh(nh-h) + \frac{nh(nh-h)(2nh-h)}{6}$$

$$= 2 + 2(2-h) + \frac{(2-h)(4-h)}{3};$$

слѣдовательно:

$$\int_1^3 x^2 dx = \text{пред.} \sum_1^3 x^2 \Delta x = \text{пред.} \left[2 + 2(2-h) + \frac{(2-h)(4-h)}{3}\right] = \frac{26}{3}.$$

Для повѣрки найдемъ сперва неопредѣленный интегралъ $\int x^2 dx$, и потомъ перейдемъ отъ него къ опредѣленному.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad \int_1^3 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_1^3 = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}.$$

Другой примѣръ:

$$\int_0^1 e^{-x} dx = \text{пред.} \sum_0^1 e^{-x} \Delta x$$

$$\Delta x = h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}, \text{ откуда: } nh = 1;$$

$$\sum_0^1 e^{-x} \Delta x = 1 \cdot h + e^{-h} \cdot h + e^{-2h} \cdot h + e^{-3h} \cdot h + \ldots + e^{-(n-1)h} h$$

$$= \frac{(1-e^{-nh})h}{1-e^{-h}} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{h}{1-e^{-h}}$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{пред.} \frac{h}{1-e^{-h}} = 1 - \frac{1}{e}.$$

Повѣрка: $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C, \quad \int_0^1 e^{-x} dx = \left(-e^{-x}\right)_0^1 =$

$$= 1 - \frac{1}{e}.$$

Еще примѣръ: найдемъ интегралы: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$.

$$\Delta x = h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} = \frac{\pi}{2n}, \quad nh = \frac{\pi}{2},$$

$$\sum_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cdot\Delta x = [1 + \cos^2 h + \cos^2 2h + \cos^2 3h + \ldots + \cos^2 (n-1)h]\,h$$

$$\sum_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\Delta x = [0 + \sin^2 h + \sin^2 2h + \sin^2 3h + \ldots + \sin^2 (n-1)h]\,h$$

$$\sum_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\Delta x + \sum_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\Delta x = nh = \frac{\pi}{2}.$$

Члены суммы: $\cos^2 h + \cos^2 2h + \cos^2 3h + \ldots + \cos^2 (n-1)h$ равны членамъ суммы: $\sin^2 h + \sin^2 2h + \sin^2 3h + \ldots + \sin^2 (n-1)h$, первый послѣднему, второй отъ начала — второму съ конца, и т. д.; по этому:

$$\sum_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\Delta x - \sum_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\Delta x = h.$$

По суммѣ и разности двухъ суммъ находимъ:

$$\sum_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cdot\Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}$$

$$\sum_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\Delta x = \frac{\pi}{4} - \frac{h}{2};$$

слѣдовательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \text{пред.} \sum_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\Delta x = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \text{пред.} \sum_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\Delta x = \frac{\pi}{4}.$$

374. Выведемъ среднее ариѳметическое изъ всѣхъ значеній сплошной функціи $f(x)$ при сплошномъ измѣненіи x между предѣлами a и b. Рѣшеніе этого вопроса приводится къ интегрированію. Дѣйствительно: давая x послѣдовательно значенія a, a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1} и b, предполагая при этомъ, что приращенія x, т. е. разности: $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, ..., $b - a_{n-1}$, одинаковы, мы легко найдемъ среднюю ариѳметическую между соотвѣтствующими этимъ x-амъ значеніями функціи; она будетъ:

$$\frac{f(a) + f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-1}) + f(b)}{n+1},$$

или

$$\frac{f(a)h + f(a_1)h + f(a_2)h + \ldots + f(a_{n-1})h + f(b)h}{nh + h}.$$

Пусть:

$nh = b - a$; тогда: $h = \frac{b-a}{n} = a_1 - a = a_2 - a_1 = \ldots = b - a_{n-1}$.

При безграничномъ возрастаніи n, h стремится къ 0; сумма $f(a)h + f(a_1)h + f(a_2)h + \ldots + f(a_{n-1})h$ подходитъ къ интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$, произведеніе $f(b)h$ къ 0, и сумма $nh + h$, или $b - a + h$, къ $b - a$. Отсюда заключаемъ, что искомое среднее ариѳметическое между всѣми значеніями $f(x)$, когда x измѣняется сплошнымъ образомъ отъ a до b, будетъ:

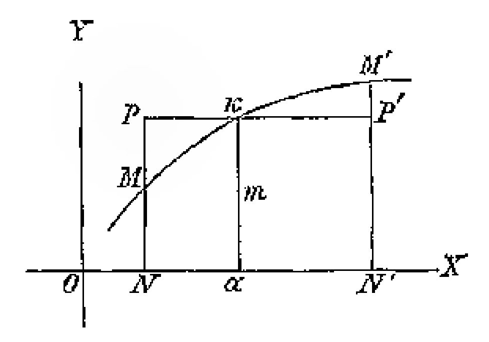
$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Обозначивъ это среднее чрезъ m, имѣемъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,m.$$

Формула эта, разсматриваемая геометрически, показываетъ, что площадь $MNN'M'$ равна площади прямоугольника $PP'N'N$, у кото-

раго основаніе есть $NN' = ON' - ON = b - a$, а высота m —



средняя ариометическая между всѣми ординатами кривой отъ точки M до M'.

Примѣры:

a) Средняя ариометическая изъ всѣхъ значеній функціи x^5, при измѣненіи x между 1 и 2, равна 10,5.

b) Средняя ариометическая значеній функціи x^3, при измѣненіи x между 0 и 2, равна $5\frac{1}{3}$.

c) Средняя ариометическая значеній функціи $x\sqrt[3]{x}$, при измѣненіи x между 1 и 8, равна $7\frac{38}{49}$.

d) Для функціи $\frac{x^2+2}{x^2+1}$, при измѣненіи x между 0 и 1, равна $1+\frac{\pi}{4}$, или 1,785398...

e) Для функціи $\cos^2 x \sin^2 x$, при измѣненіи x между 0 и π, равна $\frac{1}{8}$.

375. Разсмотримъ **интегралъ** $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$, въ которомъ предѣлы по абсолютной величинѣ одинаковы, но различаются знаками. Разлагая его на сумму двухъ въ предѣлахъ отъ $-a$ до 0, и отъ 0 до a:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

преобразуемъ первый: обозначимъ $-x$ чрезъ z; тогда: $dx = -dz$, и по этому:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(-z)\,dz.$$

Поставимъ подъ знакомъ послѣдняго интеграла x на мѣсто z. Этимъ, какъ намъ уже извѣстно, мы его не измѣнимъ; тогда:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx,$$

и слѣдовательно:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(-x)\,dx,$$

или:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx.$$

Отсюда видимъ, что если $f(x)$ четная функція, т. е. удовлетворяетъ условію: $f(-x) = f(x)$, то:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx;$$

если же $f(x)$ нечетная функція, т. е. удовлетворяетъ условію: $f(-x) = -f(x)$, то:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0.$$

Эти результаты легко получаются и изъ разсматриванія интеграла $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$, какъ предѣла суммы $\sum_{-a}^{+a} f(x)\,\Delta x$.

Примѣры:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1} = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x\,dx =$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \frac{4}{15},$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{xdx}{x^2+1}=0,\quad \int_{-2}^{+2}x^3\cos^3 2x\,dx=0,\quad \int_{-1}^{+1}\frac{x^2(\operatorname{arc\,tg} x)^3\,dx}{x^4+1}=0.$$

Если $f(x)$ ни четная, ни нечетная функція, то, разбивая ее на двѣ: $\varphi(x)$ и $\xi(x)$, изъ которыхъ первая — четная, а вторая — нечетная, получимъ:

$$\int_{-a}^{+a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{+a}\varphi(x)\,dx+\int_{-a}^{+a}\xi(x)\,dx;$$

а такъ какъ:

$$\int_{-a}^{+a}\varphi(x)\,dx=2\int_0^a\varphi(x)\,dx,\quad \int_{-a}^{+a}\xi(x)\,dx=0,$$

то:

$$\int_{-a}^{+a}f(x)\,dx=2\int_0^a\varphi(x)\,dx.$$

Примѣры:

$$\int_{-1}^{+1}(x^5+3x^4-7x^3+x^2-6x+1)\,dx=$$

$$=2\int_0^1(3x^4+x^2+1)\,dx=\frac{58}{15}$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1+x\cos x-x^3\sin^2 2x}{x^2+1}\,dx=2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x+x^2\sqrt{x}\sin 3x+x^2+2}{\sin x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3\pi}{8}.$$

376. Если на протяженіи x отъ a до b функція $f(x)$ сохраняетъ знакъ, то интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$ имѣетъ тотъ же знакъ, когда $b>a$, и противоположный, когда $b<a$. Полагая: $\varphi'(x)=f(x)$, имѣемъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a).$$

При $f(x) > 0$, или, что все равно, при: $\varphi'(x) > 0$, функція $\varphi(x)$ увеличивается съ возрастаніемъ x, и уменьшается съ уменьшеніемъ x; тогда:

$$\varphi(b) - \varphi(a) > 0\,, \text{ если } b > a\,,$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) < 0\,, \text{ если } b < a\,;$$

при $f(x) < 0$, $\varphi(x)$ уменьшается съ возрастаніемъ x, — и тогда наоборотъ:

$$\varphi(b) - \varphi(a) < 0\,, \text{ если } b > a\,,$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) > 0\,, \text{ если } b < a.$$

И такъ взятый интегралъ имѣетъ знакъ, одинаковый съ $f(x)$, когда $b > a$, и противоположный, когда $b < a$.

Въ справедливости этой теоремы можемъ удостовѣриться еще, разсматривая интегралъ, какъ предѣлъ суммы $\sum_a^b f(x)\Delta x$. Дѣйствительно: если $b > a$, то $\Delta x > 0$, и тогда, при $f(x) > 0$, всѣ элементы суммы $\sum_a^b f(x)\Delta x$ будутъ положительными; по этому сама сумма и предѣлъ ея — также положительные; въ случаѣ же $f(x) < 0$, элементы суммы отрицательные, по этому сумма и ея предѣлъ также отрицательные. Если же $b < a$, то $\Delta x < 0$, — и тогда получимъ обратныя заключенія.

377. Если при всякомъ значеніи x между предѣлами a и b имѣемъ: $f(x) > f_1(x)$, то интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$ болѣе интеграла $\int_a^b f_1(x)\,dx$ при $b > a$, и наоборотъ: первый интегралъ менѣе втораго при $b < a$. Разсматривая разность этихъ интеграловъ, видимъ, что:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f(x) - f_1(x)]dx > 0\,, \text{ если } b > a$$

$$< 0, \text{ если } b < a,$$

потому что, по условію, разность $f(x) - f_1(x)$ сохраняетъ знакъ $+$; а отсюда вытекаетъ приведенная теорема.

378. Примѣнимъ эту теорему къ выводу **формулы Валлиса**, выражающей отношеніе окружности къ діаметру въ видѣ безконечнаго произведенія. При всякомъ значеніи x, взятомъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$, имѣемъ:

$$\sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x;$$

слѣдовательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx,$$

или:

$$\frac{2.4.6.8\ldots(2n-2)}{3.5.7.9\ldots(2n-1)} > \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots2n}\cdot\frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6.8\ldots2n}{3.5.7.9\ldots(2n+1)},$$

откуда:

$$\pi > 2\cdot\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots(2n-2)(2n-2)\,2n.2n}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)(2n+1)}$$

$$< 2\cdot\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots(2n-2)(2n-2)\,2n}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)},$$

или:

(a)

$$\pi > 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$< 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1};$$

а отсюда:

$$\pi = 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n+\theta}{2n+1} \quad {}^{*})$$

(θ зависитъ отъ n и заключается между 0 и 1).

Увеличивая n безгранично, и замѣчая при этомъ, что предѣлъ $\frac{2n+\theta}{2n+1} = 1$, находимъ:

---

*) Формулѣ этой можно дать и такой видъ:

$$\pi = 2\cdot\frac{2.2.4.4.6.6\ldots(2n-2)(2n-2).2n.2n}{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)(2n+\theta_1)}$$

или

$$\pi = 2\cdot\left[\frac{2.4.6.8\ldots2n}{1.3.5.7\ldots(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+\theta_1}. \qquad \left(\theta_1 {> 0 \atop < 1}\right)$$

$$\pi = \text{пред.} \left[2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}\right],$$

или:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots\cdots$$

Неравенства (α) даютъ для π границы, довольно медленно сближающіяся:

$$\pi > 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \qquad\qquad \pi > 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$< 2 \cdot \frac{2}{1}, \qquad\qquad < 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}, \quad \text{и т. д.}$$

379. **Если на протяженіи x отъ a до b функція $\psi(x)$ сохраняетъ знакъ, то интегралъ $\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx$ можно представить произведеніемъ интеграла $\int_a^b \psi(x)\,dx$ на среднее значеніе функціи $f(x)$ при измѣненіи x между a и b.**

Пусть M и m наибольшее и наименьшее значенія функціи $f(x)$ на пути x между a и b. Интегралъ $\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx$ заключается между произведеніями:

$$M\int_a^b \psi(x)\,dx \quad \text{и} \quad m\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Дѣйствительно:

$$M\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = \int_a^b [M - f(x)]\,\psi(x)\,dx \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx - m\int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - m]\,\psi(x)\,dx. \quad (2)$$

Разности: $M - f(x)$ и $f(x) - m$ положительныя, а функція $\psi(x)$, по условію, сохраняетъ знакъ; слѣдовательно разности (1) и (2) однозначны; по этому: если разности (1) и (2) положительныя, то:

$$M\int_a^b \psi(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx > m\int_a^b \psi(x)\,dx;$$

если же онѣ отрицательныя, то:

$$M\int_a^b \psi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx < m\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Отсюда находимъ:

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = \left(\overline{M,\, m}\right)\int_a^b \psi(x)\,dx;$$

гдѣ множитель $(\overline{M,m})$ есть одно изъ значеній $f(x)$, заключающееся между M и m, т. е. значеніе $f(x)$, соотвѣтствующее одному изъ среднихъ значеній x между предѣлами a и b. Если послѣднее среднее значеніе x обозначимъ чрезъ x_1, то:

$$\left(\overline{M,\, m}\right) = f(x_1) = f[a + \theta\,(b - a)] \qquad \left(\theta \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}\right)$$

(3) $$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = f(x_1)\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Формула эта показываетъ, что, *оставляя подъ знакомъ интеграла функцію сохраняющую знакъ, мы можемъ другую вынести изъ подъ знака интеграла среднимъ ея значеніемъ* (отвѣчающимъ среднему x между a и b).

Поставимъ въ (3) на мѣсто $\psi(x)$ единицу; этимъ мы не нарушимъ условія сохраненія знака $\psi(x)$; тогда получимъ:

(4) $$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_1)\int_a^b dx = (b - a)f(x_1).$$

Сравнивая этотъ результатъ съ послѣднею формулою n^o 374, видимъ, что $f(x_1)$ есть среднее ариѳметическое между всѣми значеніями $f(x)$ при измѣненіи x отъ a до b. Но само собою разумѣется, что это заключеніе относится только къ (4), а въ (3) $f(x_1)$ есть среднее, но не среднее ариѳметическое.

Формулы Тайлора и Маклорена.

380. Предполагая функціи f и f' сплошными на пути перемѣнной отъ x до $x + h$, имѣемъ:

$$f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h} f'(z)\,dz.$$

Введемъ подъ знакомъ интеграла вмѣсто z новую перемѣнную t, связь которой съ z пусть будетъ:

$$z=x+h-t,\ \text{откуда:}\ dz=-dt;$$

тогда:

$$\int_x^{x+h} f'(z)\,dz=-\int_h^0 f'(x+h-t)\,dt=\int_0^h f'(x+h-t)\,dt$$

$$f(x+h)=f(x)+\int_0^h f'(x+h-t)\,dt.$$

Интегрируя по частямъ $f'(x+h-t)\,dt$ въ предѣлахъ 0 и h, предполагая и f'' сплошною функціею, получимъ:

$$\int_0^h f'(x+h-t)dt=hf'(x)+\int_0^h tf''(x+h-t)\,dt;$$

по этому:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\int_0^h tf''(x+h-t)\,dt.$$

Опять интегрируемъ по частямъ, считая и f''' сплошною:

$$\int_0^h tf'(x+h-t)\,dt=\int_0^h f''(x+h-t)\,d\frac{t^2}{1.2}=$$

$$=\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\int_0^h \frac{t^2}{1.2}f'''(x+h-t)\,dt;$$

тогда:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\int_0^h \frac{t^2}{1.2}f'''(x+h-t)\,dt.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, предполагая и функціи $f^{(4)}$, $f^{(5)}, \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ сплошными, получимъ:

$$(a)\qquad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)+R,$$

гдѣ
$$R=\int_0^h\frac{t^n}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(x+h-t)\,dt.$$

Это — *формула Тайлора*. Остаточный членъ въ ней выраженъ интеграломъ. Чтобы получить его въ той формѣ, въ какой онъ приведенъ былъ въ n° 123, разложимъ функцію t^n на два множителя: t^{k-1} и t^{n+1-k}, считая k не менѣе 1 и не болѣе $n+1$, а подъинтегральную функцію представимъ произведеніемъ:

$$\frac{t^{n+1-k}}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(x+h-t)\cdot t^{k-1}\,dt.$$

Въ этомъ произведеніи всѣ множители — сплошныя функціи.

Оставляя t^{k-1} подъ знакомъ интеграла, какъ функцію, сохраняющую знакъ при измѣненіи t отъ 0 до h, и вынося $\frac{t^{n+1-k}}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(x+h-t)$ среднимъ значеніемъ, получимъ:

$$R=\frac{(\theta_1 h)^{n+1-k}}{1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(x+h-\theta_1 h)\int_0^h t^{k-1}\,dt \qquad \begin{pmatrix}\theta_1>0\\ <1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{h^{n+1}\,\theta_1^{\,n+1-k}}{1.2.3\ldots n.k}f^{(n+1)}(x+(1-\theta_1)h).$$

Если обозначить $1-\theta_1$ чрезъ θ, то: $\theta_1=1-\theta$; тогда:

$$R=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n+1-k}}{1.2.3\ldots n.k}f^{(n+1)}(x+\theta h) \qquad \begin{pmatrix}\theta>0\\ <1\end{pmatrix}$$

Формулу Маклорена (съ остаточнымъ членомъ) получимъ изъ (a), полагая $x=0$, и замѣняя потомъ h буквою x.

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)+R_1,$$

$$R_1=\int_0^x\frac{t^n}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(x-t)\,dt.$$

Формулы квадратуръ.

381. Опредѣленный интегралъ вычисляется легко, когда извѣстенъ неопредѣленный. Если $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Если функція $\varphi(x)$ неизвѣстна, то *для вычисленія интеграла* $\int_a^b f(x)\,dx$, въ которомъ пусть $b > a$, возьмемъ между a и b промежуточныя числа: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$, такъ чтобы рядъ:

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ b$$

представлялъ ариѳметическую прогрессію, т. е. чтобы разности

$$a_1 - a,\ a_2 - a_1,\ a_3 - a_2, \ldots,\ a_{n-1} - a_{n-2},\ b - a_{n-1}$$

были одинаковы, и разобьемъ интегралъ на n интеграловъ въ предѣлахъ отъ a до a_1, отъ a_1 до a_2, и т. д.:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} f(x)\,dx + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

Обозначая разность $a_1 - a$ чрезъ ω, имѣемъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = \varphi(a_1) - \varphi(a) = \varphi(a+\omega) - \varphi(a) =$$
$$= \omega\varphi'(a) + \frac{\omega^2}{1.2}\varphi''(a) + \frac{\omega^3}{1.2.3}\varphi'''(a) + \frac{\omega^4}{1.2.3.4}\varphi^{(4)}(a) +$$
$$+ \int_0^\omega \frac{t^4}{1.2.3.4}\varphi^{(5)}(a+\omega-t)\,dt;$$

а такъ какъ: $\varphi'(x) = f(x)$, $\varphi''(x) = f'(x)$, $\varphi'''(x) = f''(x), \ldots$, то:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = \omega f(a) + \frac{\omega^2}{1.2} f'(a) + \frac{\omega^3}{1.2.3} f''(a) + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} f'''(a) +$$

$$(1) \qquad + \int_0^\omega \frac{t^4}{1.2.3.4} f^{(4)}(a+\omega-t)\,dt$$

Функціи f, f', f'', f''' и $f^{(4)}$ предполагаются сплошными на протяженіи перемѣнной отъ a до b, а стало-быть и отъ a до a_1.

Разлагая подобнымъ же образомъ разности: $f(a_1) - f(a)$ и $f'(a_1) - f'(a)$, и не идя при этомъ въ разложеніяхъ далѣе четвертой производной отъ f, получимъ:

$$(2) \qquad f(a_1) - f(a) = \omega f'(a) + \frac{\omega^2}{1.2} f''(a) + \frac{\omega^3}{1.2.3} f'''(a) +$$

$$+ \int_0^\omega \frac{t^3}{1.2.3} f^{(4)}(a+\omega-t)\,dt.$$

$$(3) \qquad f'(a_1) - f'(a) = \omega f''(a) + \frac{\omega^2}{1.2} f'''(a) +$$

$$+ \int_0^\omega \frac{t^2}{1.2} f^{(4)}(a+\omega-t)\,dt.$$

Помножимъ (2) на $A\omega$, (3) на $B\omega^2$ (A и B числа произвольныя), и произведенія сложимъ съ (1); получимъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx + A\omega[f(a_1) - f(a)] + B\omega^2[f'(a_1) - f'(a)] =$$

$$= \omega f(a) + \omega^2 f'(a)\left(\frac{1}{1.2} + A\right) + \omega^3 f''(a)\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{A}{1.2} + B\right) +$$

$$+ \omega^4 f'''(a)\left(\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{A}{1.2.3} + \frac{B}{1.2}\right) + R,$$

гдѣ $$R = \int_0^\omega \left(\frac{t^4}{1.2.3.4} + \frac{A\omega\, t^3}{1.2.3} + \frac{B\omega^2 t^2}{1.2}\right) f^{(4)}(a+\omega-t)\,dt.$$

Произвольныя числа A и B подчинимъ условіямъ:

$$\frac{1}{1.2} + A = 0, \quad \frac{1}{1.2.3} + \frac{A}{1.2} + B = 0;$$

тогда: $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{A}{1.2.3} + \frac{B}{1.2} = 0$,

и слѣдовательно:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = \omega\frac{f(a)+f(a_1)}{2} - \frac{1}{12}\omega^2[f'(a_1)-f'(a)] + R,$$

$$R = \int_0^\omega \frac{t^4-2\omega t^3+\omega^2 t^2}{24} f^{(4)}(a+\omega-t)\,dt.$$

Функція $f^{(4)}(a+\omega-t)$ на протяженіи t отъ 0 до ω сплошная по условію; функція $t^4-2\omega t^3+\omega^2 t^2$, какъ цѣлая, также сплошная, и при томъ сохраняющая знакъ $+$, какъ полный квадратъ разности $t^2-\omega t$; по этому:

$$R = \frac{1}{24} f^{(4)}(a+\omega-\theta\omega)\int_0^\omega (t^4-2\omega t^3+\omega^2 t^2)\,dt =$$

$$= \frac{1}{720}\omega^5 f^{(4)}(a+\omega-\theta\omega) \qquad \begin{pmatrix}\theta>0\\ <1\end{pmatrix}$$

$f^{(4)}(a+\omega-\theta\omega)$ есть значеніе $f^{(4)}(x)$ для x средняго между a и a_1; представимъ это значеніе чрезъ $f^{(4)}(\overline{a\cdot a_1})$; тогда:

$$R = \frac{1}{720}\omega^5 f^{(4)}(\overline{a\cdot a_1}).$$

И такъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = \omega\cdot\frac{f(a)+f(a_1)}{2} - \frac{1}{12}\omega^2[f'(a_1)-f'(a)] + $$
$$+ \frac{1}{720}\omega^5 f^{(4)}(\overline{a\cdot a_1})$$

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = \omega\cdot\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2} - \frac{1}{12}\omega^2[f'(a_2)-f'(a_1)] + $$
$$+ \frac{1}{720}\omega^5 f^{(4)}(\overline{a_1\cdot a_2})$$

$$\int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx = \omega\cdot\frac{f(a_2)+f(a_3)}{2} - \frac{1}{12}\omega^2[f'(a_3)-f'(a_2)] + $$
$$+ \frac{1}{720}\omega^5 f^{(4)}(\overline{a_2\cdot a_3})$$

. . . .

. . . .

$$\int_{a_{n-1}}^{b} f(x)\,dx = \omega \cdot \frac{f(a_{n-1}) + f(b)}{2} - \frac{1}{12}\omega^2 [f'(b) - f'(a_{n-1})] + \\ + \frac{1}{720}\omega^5 f^{(4)}(\overline{a_{n-1} \cdot b}).$$

Складывая, получимъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \omega\left[\frac{f(a)}{2} + f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right] - \\ - \frac{1}{12}\omega^2 \Big[f'(b) - f'(a)\Big] + r,$$

гдѣ $r = \frac{1}{720}\omega^5\Big[f^{(4)}(\overline{a \cdot a_1}) + f^{(4)}(\overline{a_1 \cdot a_2}) + f^{(4)}(\overline{a_2 \cdot a_3}) + \ldots + f^{(4)}(\overline{a_{n-1} \cdot b})\Big]$.

Остаточному члену r можно дать видъ:

$$\frac{1}{720}\omega^4 (b-a)\frac{f^{(4)}(\overline{a.a_1}) + f^{(4)}(\overline{a_1.a_2}) + \ldots + f^{(4)}(\overline{a_{n-1}.b})}{n};$$

а такъ какъ отношеніе $\frac{f^{(4)}(\overline{a.a_1}) + f^{(4)}(\overline{a_1.a_2}) + \ldots + f^{(4)}(\overline{a_{n-1}.b})}{n}$ есть среднее ариѳметическое между $f^{(4)}(\overline{a \cdot a_1})$, $f^{(4)}(\overline{a_1 \cdot a_2}), \ldots, f^{(4)}(\overline{a_{n-1} \cdot b})$, то его можно разсматривать какъ значеніе $f^{(4)}(x)$ для одной изъ среднихъ величинъ x между a и b; и потому:

$$r = \frac{1}{720}\omega^4 (b-a) f^{(4)}(\overline{a \cdot b}).$$

И такъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \omega\left[\frac{f(a)}{2} + f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right] - \\ - \frac{\omega^2}{12}\Big[f'(b) - f'(a)\Big] + \frac{\omega^4}{720}(b-a) f^{(4)}(\overline{a \cdot b}),$$

гдѣ: $\omega = \frac{b-a}{n}$, $a_1 = a + \omega$, $a_2 = a + 2\omega$, $a_3 = a + 3\omega, \ldots$

Вотъ одна изъ **формулъ квадратуръ**, формулъ, служащихъ для вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ. Съ помощію ея можно вычислить интегралъ съ какою угодно степенью приближенія. Въ послѣднемъ членѣ этой формулы остается неизвѣстнымъ множитель $f^{(4)}(\overline{a \cdot b})$; но для вычисленія интеграла намъ этотъ членъ и не нуженъ. Мы будемъ пользоваться имъ для того только, чтобы судить о степени приближенія суммы:

$$\omega\left[\frac{f(a)}{2}+f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right]-\frac{\omega^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right]$$

къ истинной величинѣ интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Если M есть наибольшая изъ абсолютныхъ величинъ $f^{(4)}(x)$ на протяженіи x отъ a до b, (или превышающая каждую изъ этихъ абсолютныхъ величинъ), то разница между послѣднею суммою и интеграломъ менѣе $\frac{\omega^4}{720}(b-a)M$.

Рѣшимъ вопросъ: каково должно быть ω, чтобы послѣдняя сумма выражала интегралъ съ погрѣшностью, меньшею данной величины ε. Для этого возьмемъ ω, удовлетворяющимъ неравенству:

$$\frac{\omega^4}{720}(b-a)M<\varepsilon,$$

откуда:

$$\omega<\sqrt[4]{\frac{720\,\varepsilon}{(b-a)M}},\quad n>(b-a)\sqrt[4]{\frac{(b-a)M}{720\,\varepsilon}}.$$

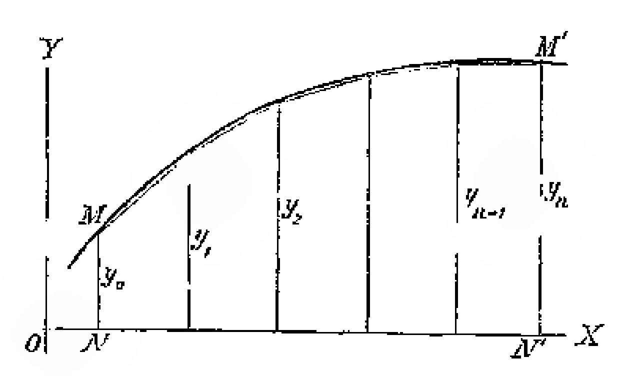
Если-бы мы, при разложеніяхъ по формулѣ Тайлора, пошли далѣе четвертой производной f, то получили-бы болѣе сложную формулу квадратуръ, съ большимъ числомъ членовъ.

Выводъ *общей формулы квадратуръ*, относительно которой приведенная здѣсь представляетъ частвый случай, см. въ прибавленіяхъ.

Съ геометрической точки зрѣнія, произведеніе:

$$\omega\left[\frac{f(a)}{2}+f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right]$$

представляетъ *сумму площадей трапецій* между ординатами y_0 и y_1,



y_1 и y_2, y_2 и y_3, ... , y_{n-1} и y_n; а эти ординаты отвѣчаютъ аб-

сциссамъ: a, a_1, a_2, ..., a_{n-1} и b, такъ что: $y_0=f(a)$, $y_1=f(a_1)$, $y_2=f(a_2)$, ..., $y_{n-1}=f(a_{n-1})$, $y_n=f(b)$. И дѣйствительно: сумма площадей этихъ трапецій

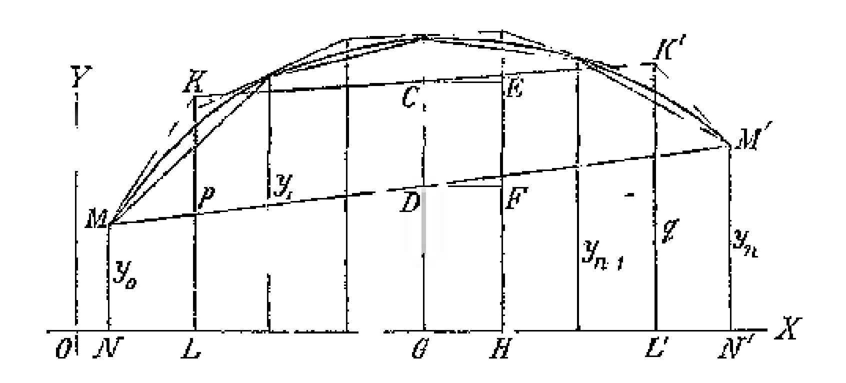
$$=\frac{y_0+y_1}{2}\omega+\frac{y_1+y_2}{2}\omega+\frac{y_2+y_3}{2}\omega+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\omega$$

$$=\omega\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right).$$

382. Пусть r_1 дополняетъ сумму площадей трапецій до площади криволинейной фигуры $MNN'M'$, или, что все равно, до интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$; тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\omega\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)+r_1.$$

Принимая $\omega\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)$ за площадь $MNN'M'$, мы дѣлаемъ ошибку r_1. Чтобы судить о степени этой ошибки, проведемъ промежуточныя ординаты въ равномъ удаленіи отъ прежнихъ;



затѣмъ чрезъ верхніе концы прежнихъ ординатъ проведемъ касательныя къ кривой до встрѣчи съ продолженіями новыхъ. Такимъ образомъ построятся новыя трапеціи, которыя, примѣняясь къ нашему чертежу, назовемъ внѣшними, и которыхъ счетомъ будетъ $n+1$ (одной болѣе противъ числа внутреннихъ трапецій). Обозначимъ сумму площадей внѣшнихъ трапецій чрезъ S', внутреннихъ S; а длины прямыхъ KL и $K'L'$ чрезъ p и q; тогда:

$$S' = \frac{y_0+p}{2}\cdot\frac{\omega}{2} + y_1\omega + y_2\omega + \ldots + y_{n-1}\omega + \frac{q+y_n}{2}\cdot\frac{\omega}{2},$$

$$S = \frac{y_0}{2}\omega + y_1\omega + y_2\omega + \ldots + y_{n-1}\omega + \frac{y_n}{2}\omega,$$

$$S' - S = \left(\frac{p+q}{2} - \frac{y_0+y_n}{2}\right)\frac{\omega}{2}.$$

Изъ чертежа видимъ, что: $\frac{p+q}{2} = CG$, $\frac{y_0+y_n}{2} = DG$, $\frac{\omega}{2} = GH$; по этому:

$$S' - S = (CG - DG)\,GH = CD\cdot DF,$$

т. е. разность между суммою площадей внѣшнихъ трапецій и суммою площадей внутреннихъ равна площади прямоугольника $CDFE$. А такъ какъ площадь разсматриваемой криволинейной фигуры заключается между этими суммами, то *погрѣшность* r_1 *менѣе площади* $CDFE$.

383. Изъ формулы квадратуръ, приведенной въ n° 381, выведемъ другую. Вмѣсто приращенія ω, которое равно $\frac{b-a}{n}$, возьмемъ вдвое меньшее, и обозначимъ его чрезъ h. Рядъ чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію съ разностью h, начиная отъ a и кончая b, будетъ:

$$a,\ \alpha,\ a_1,\ \alpha_1,\ a_2,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n-2},\ a_{n-1},\ \alpha_{n-1},\ b,$$

(если обозначить $a+h$, $a+3h$, $a+5h$, ..., $a+(2n-3)h$, $a+(2n-1)h$ чрезъ α, α_1, α_2, ..., α_{n-2}, α_{n-1}). Формула квадратуръ приметъ видъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(\alpha) + f(a_1) + f(\alpha_1) + \ldots + f(a_{n-1}) + f(\alpha_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right] - \\ - \frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right] + \frac{h^4}{720}(b-a)f^{(4)}(x_1),$$

гдѣ x_1 средняя величина между a и b.

Помножимъ обѣ части на 2, и на мѣсто h подставимъ $\frac{\omega}{2}$; получимъ:

$$2\int_a^b f(x)\,dx = \omega\left[\frac{f(a)}{2} + f(\alpha) + f(a_1) + f(\alpha_1) + \ldots + f(a_{n-1}) + f(\alpha_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right] - \\ - \frac{\omega^2}{24}\left[f'(b) - f'(a)\right] + \frac{\omega^4}{5760}(b-a)\,f^{(4)}(x_1).$$

Вычитая отсюда интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$, равный, по n° 381, суммѣ:

$$(1)\qquad \omega\left[\frac{f(a)}{2}+f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right]-$$
$$-\frac{\omega^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right]+\frac{\omega^4}{720}(b-a)f^{(4)}(x_{11}),$$

гдѣ x_{11} среднее между a и b, находимъ:

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,dx=\omega\left[f(\alpha)+f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_{n-1})\right]+$$
$$+\frac{\omega^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]-\frac{\omega^4}{5760}(b-a)\left[8f^{(4)}(x_{11})-f^{(4)}(x_1)\right].$$

Это — *другая формула квадратуръ*. Мы ее выведемъ потомъ независимо отъ первой, и остаточный членъ представимъ въ другой, болѣе простой формѣ:

384. Формула Симпсона. Выключимъ изъ (1) и (2) n° 383 разность $f'(b)-f'(a)$. Для этого помножимъ (2) на 2 и полученное произведенiе сложимъ съ (1); получимъ:

$$3\int_a^b f(x)\,dx=\omega\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1})+\right.$$
$$\left.+2\left[f(\alpha)+f(\alpha_1)+\ldots+f(\alpha_{n-1})\right]\right\}-\frac{\omega^4}{2880}(b-a)\left[4f^{(4)}(x_{11})-f^{(4)}(x_1)\right];$$

а отсюда, замѣняя ω чрезъ $2h$ и дѣля обѣ части на 3:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left\{f(a)+f(b)+2\left[f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1})\right]+\right.$$
$$\left.+4\left[f(\alpha)+f(\alpha_1)+\ldots+f(\alpha_{n-1})\right]\right\}-\frac{h^4}{540}(b-a)\left[4f^{(4)}(x_{11})-f^{(4)}(x_1)\right],$$

гдѣ: $h=\frac{b-a}{2n}$, $\alpha=a+h$, $a_1=a+2h$, $\alpha_1=a+3h$, ... ,

$$a_{n-1}=a+(2n-2)h,\quad \alpha_{n-1}=a+(2n-1)h.$$

Если M есть наибольшая изъ абсолютныхъ величинъ $f^{(4)}(x)$ на

пути x отъ a до b, или превышающая каждую изъ этихъ абсолютныхъ величинъ, то абсолютная величина разности $4f^{(4)}(x_{11})-f^{(4)}(x_1)$ менѣе $5M$; по этому остаточный членъ въ послѣдней формулѣ по абсолютной величинѣ менѣе $\frac{h^4}{108}(b-a)M$.

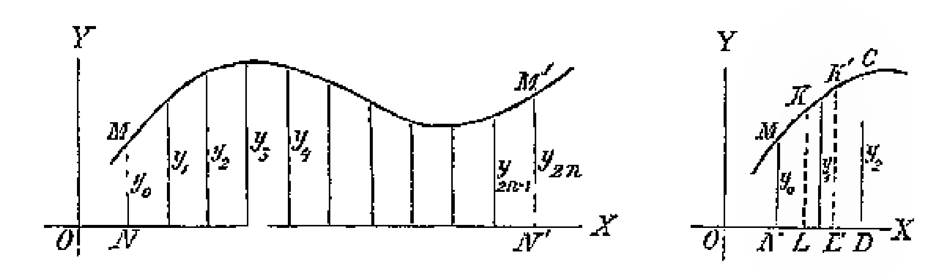
Разсматривая значенія функціи, какъ ординаты точекъ кривой, примемъ обозначенія:

$$f(a)=y_0,\ f(\alpha)=y_1,\ f(a_1)=y_2,\ f(\alpha_1)=y_3,\ f(a_2)=y_4,\ \ldots,$$
$$\ldots,\ f(\alpha_{n-1})=y_{2n-1},\ f(b)=y_{2n};$$

тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}\Big[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+$$
$$+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})\Big]+r_{11}\quad\left(\begin{matrix}r_{11}\text{ остаточ-}\\ \text{ный членъ.}\end{matrix}\right).$$

Произведеніе $\frac{h}{3}\Big[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+$ $+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})\Big]$ выражаетъ интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$, или площадь фигуры $MNN'M'$, тѣмъ съ большею точностью, чѣмъ менѣе h, или, стало-быть, чѣмъ болѣе $2n$.



Вычисленіе площади по формулѣ:

$$\text{площ.}\qquad=\frac{h}{3}\Big[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+$$
$$+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})\Big]\quad\left(\begin{matrix}\text{Формула}\\ \text{Симпсона.}\end{matrix}\right)$$

особенно удобно, когда кривая задана графически. Прочитаемъ эту формулу такъ: *площадь* $MNN'M'$ равна *произведенію трети раз-*

стоянія между сосѣдними ординатами на сумму крайнихъ ординатъ, сложенную съ удвоенною суммою среднихъ ординатъ съ четными указателями и съ учетверенною суммою ординатъ съ нечетными указателями.

Формулу Симпсона легко вывести элементарнымъ путемъ, но безъ остаточнаго члена. Разсматривая часть площади между ординатами y_0 и y_2, часть $MNDC$, раздѣлимъ линію ND на три равныя части: NL, LL' и $L'D$ и чрезъ точки дѣленія проведемъ ординаты LK и $L'K'$; тогда, принимая линіи MK, KK' и $K'C$ за прямыя, приблизительно получимъ:

$$\text{площ. } NMKL = \frac{y_0 + KL}{2} \cdot NL = \frac{y_0 + KL}{2} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{h}{3}(y_0 + KL)$$

$$\text{площ. } LKK'L' = \frac{KL + K'L'}{2} LL' = y_1 \cdot \frac{2h}{3} = \frac{h}{3} \cdot 2y_1,$$

$$\text{площ. } L'K'CD = \frac{K'L' + y_2}{2} \cdot L'D = \frac{K'L' + y_2}{2} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{h}{3}(K'L' + y_2);$$

стало быть:

$$\text{площ. } MNDC = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Также найдемъ и площади между ординатами y_2 и y_4, y_4 и y_6, ..., y_{2n-2} и y_{2n}; онѣ приблизительно будутъ:

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \quad \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6), \ldots, \quad \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Складывая, получимъ:

$$\text{площ. } MNN'M' = \frac{h}{3}\Big[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + $$
$$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\Big].$$

385. Выведемъ теперь **вторую формулу квадратуръ** независимо отъ первой. Употребляя прежнія обозначенія, имѣемъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = \varphi(a_1) - \varphi(a) = \varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha - h)$$

$$\varphi(\alpha+h)=\varphi(\alpha)+h\varphi'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(\alpha)+\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(\alpha)+$$

$$+\frac{h^4}{1.2.3.4}\varphi^{(4)}(\alpha)+\int_0^h\frac{t^4}{1.2.3.4}\varphi^{(5)}(\alpha+h-t)\,dt$$

$$\varphi(\alpha-h)=\varphi(\alpha)-h\varphi'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(\alpha)-\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(\alpha)+$$

$$+\frac{h^4}{1.2.3.4}\varphi^{(4)}(\alpha)+\int_0^{-h}\frac{t^4}{1.2.3.4}\varphi^{(5)}(\alpha-h-t)\,dt;$$

$$(1)\int_a^{a_1}f(x)\,dx=2h\varphi'(\alpha)+\frac{h^3}{3}\varphi'''(\alpha)+\int_0^h\frac{t^4}{1.2.3.4}\varphi^{(5)}(\alpha+h-t)dt-$$

$$-\int_0^{-h}\frac{t^4}{1.2.3.4}\varphi^{(5)}(\alpha-h-t)\,dt=2hf(\alpha)+\frac{h^3}{3}f''(\alpha)+$$

$$+\int_0^h\frac{t^4}{1.2.3.4}f^{(4)}(\alpha+h-t)dt-\int_0^{-h}\frac{t^4}{1.2.3.4}f^{(4)}(\alpha-h-t)\,dt$$

$$f'(a_1)=f'(\alpha+h)=f'(\alpha)+hf''(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}f'''(\alpha)+$$

$$+\int_0^h\frac{t^2}{1.2}f^{(4)}(\alpha+h-t)\,dt$$

$$f'(a)=f'(\alpha-h)=f'(\alpha)-hf''(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}f'''(\alpha)+$$

$$+\int_0^{-h}\frac{t^2}{1.2}f^{(4)}(\alpha-h-t)\,dt,$$

$$(2)\quad f'(a_1)-f'(a)=2hf''(\alpha)+\int_0^h\frac{t^2}{1.2}f^{(4)}(\alpha+h-t)\,dt-$$

$$-\int_0^{-h}\frac{t^2}{1.2}f^{(4)}(\alpha-h-t)\,dt.$$

Исключимъ $f''(\alpha)$ изъ (1) и (2); для этого помножимъ (2) на $\frac{h^2}{6}$ и произведеніе вычтемъ изъ (1); получимъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)dx - \frac{h^2}{6}\Big[f'(a_1) - f'(a)\Big] = 2hf(\alpha) + \int_0^h \frac{t^4 - 2h^2t^2}{24} f^{(4)}(\alpha + h - t)dt -$$

$$- \int_0^{-h} \frac{t^4 - 2h^2t^2}{24} f^{(4)}(\alpha - h - t)dt,$$

откуда:

$$\int_a^{a_1} f(x)dx = \omega f(\alpha) + \frac{\omega^2}{24}\Big[f'(a_1) - f'(a)\Big] + \int_0^h \frac{t^4 - 2h^2t^2}{24} f^{(4)}(\alpha + h - t)dt -$$

$$- \int_0^{-h} \frac{t^4 - 2h^2t^2}{24} f^{(4)}(\alpha - h - t)\, dt.$$

Приведемъ два послѣдніе интеграла къ интеграламъ въ одинаковыхъ предѣлахъ, и потомъ соединимъ ихъ въ одинъ интегралъ. Для этого положимъ въ первомъ: $t = hz$, а во второмъ: $t = -hz$; тогда:

$$\int_0^h \frac{t^4 - 2h^2t^2}{24} f^{(4)}(\alpha + h - t)dt = \frac{h^5}{24}\int_0^1 (z^4 - 2z^2) f^{(4)}(\alpha + h - hz)\, dz$$

$$\int_0^{-h} \frac{t^4 - 2h^2t^2}{24} f^{(4)}(\alpha - h - t)dt = -\frac{h^5}{24}\int_0^1 (z^4 - 2z^2) f^{(4)}(\alpha - h + hz)\, dz$$

$$\int_0^h \frac{t^4 - 2h^2t^2}{24} f^{(4)}(\alpha + h - t)\, dt - \int_0^{-h} \frac{t^4 - 2h^2t^2}{24} f^{(4)}(\alpha - h - t)\, dt =$$

$$= \frac{h^5}{24}\int_0^1 (z^4 - 2z^2)[f^{(4)}(\alpha + h - hz) + f^{(4)}(\alpha - h + hz)]\, dz.$$

Функція $f^{(4)}(x)$ предполагается сплошною на протяженіи x отъ a до b, стало-быть и $f^{(4)}(\alpha + h - hz)$ и $f^{(4)}(\alpha - h + hz)$ сплошныя отъ $z = 0$ до $z = 1$; функція же $z^4 - 2z^2$, которую можно представить произведеніемъ $(z^2 - 2)z^2$, сплошная и при томъ сохраняющая знакъ —; по этому:

$$\frac{h^5}{24}\int_0^1 (z^4 - 2z^4)[f^{(4)}(\alpha + h - hz) + f^{(4)}(\alpha - h + hz)]\, dz =$$

$$=\frac{h^5}{24}\left[f^{(4)}(a+h-\theta h)+f^{(4)}(a-h+\theta h)\right]\int_0^1(z^4-2z^3)\,dz=$$

$$=-\frac{7h^5}{180}\cdot\frac{f^{(4)}(a_1-\theta h)+f^{(4)}(a+\theta h)}{2}=-\frac{7h^5}{180}f^{(4)}\left(\overline{a\cdot a_1}\right)=$$

$$=-\frac{7\omega^5}{5760}f^{(4)}\left(\overline{a\cdot a_1}\right)$$

$\left(\begin{matrix}\theta>0\\ <1\end{matrix}\right)$; $f^{(4)}\left(\overline{a\cdot a_1}\right)$ есть значеніе $f^{(4)}(x)$ для средняго x между a и a_1.

И такъ:

$$\int_a^{a_1}f(x)dx=\omega f(a)+\frac{\omega^2}{24}\left[f'(a_1)-f'(a)\right]-\frac{7\omega^5}{5760}f^{(4)}\left(\overline{a\cdot a_1}\right)$$

$$\int_{a_1}^{a_2}f(x)dx=\omega f(a_1)+\frac{\omega^2}{24}\left[f'(a_2)-f'(a_1)\right]-\frac{7\omega^5}{5760}f^{(4)}\left(\overline{a_1\cdot a_2}\right)$$

$$\int_{a_2}^{a_3}f(x)dx=\omega f(a_2)+\frac{\omega^2}{24}\left[f'(a_3)-f'(a_2)\right]-\frac{7\omega^5}{5760}f^{(4)}\left(\overline{a_2\cdot a_3}\right)$$

. . . .

. . . .

$$\int_{a_{n-1}}^{b}f(x)dx=\omega f(a_{n-1})+\frac{\omega^2}{24}\left[f'(b)-f'(a_{n-1})\right]-\frac{7\omega^5}{5760}f^{(4)}\left(\overline{a_{n-1}\cdot b}\right).$$

Складывая эти интегралы, получимъ:

$$\int_a^b f(x)dx=\omega\left[f(a)+f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1})\right]+$$

$$+\frac{\omega^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]+R_1,$$

гдѣ: $$R_1=-\frac{7\omega^5}{5760}\left[f^{(4)}\left(\overline{a\cdot a_1}\right)+f^{(4)}\left(\overline{a_1\cdot a_2}\right)+\ldots+f^{(4)}\left(\overline{a_{n-1}\cdot b}\right)\right]$$

$$=-\frac{7\omega^4(b-a)}{5760}\cdot\frac{f^{(4)}\left(\overline{a.a_1}\right)+f^{(4)}\left(\overline{a_1.a_2}\right)+\ldots+f^{(4)}\left(\overline{a_{n-1}.b}\right)}{n}=$$

$$=-\frac{7\omega^4}{5760}(b-a)f^{(4)}\left(\overline{a\cdot b}\right)$$

Это — *вторая формула квадратуръ* *). Въ ней: $\omega=\frac{b-a}{n}$,

---

*) Въ общемъ видѣ см. въ прибавленіяхъ.

$$\alpha = a + \frac{\omega}{2},\ \alpha_1 = a + \frac{3\omega}{2},\ \alpha_2 = a + \frac{5\omega}{2}, \ldots,\ \alpha_{n-1} = a + \frac{(2n-1)\omega}{2}.$$

Сумма:

$$\omega\Big[f(\alpha) + f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_{n-1})\Big] + \frac{\omega^2}{24}\Big[f'(b) - f'(a)\Big]$$

представляетъ интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$ съ погрѣшностью, меньшею произведенія

$$\frac{7\omega^4}{5760}(b-a)M,$$

гдѣ M равно наибольшему изъ всѣхъ абсолютныхъ значеній $f^{(4)}(x)$ въ предѣлахъ для x отъ a до b, или болѣе послѣдняго.

Чтобы погрѣшность была менѣе данной величины ε, можно взять ω удовлетворяющимъ неравенству:

$$\omega < \sqrt[4]{\frac{5760\,\varepsilon}{7(b-a)M}}.$$

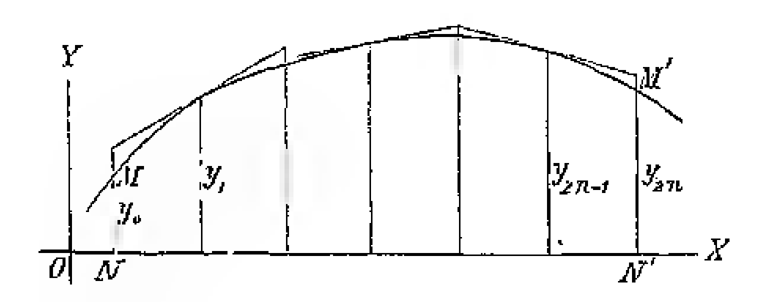
Представимъ произведеніе

$$\omega\Big[f(\alpha) + f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_{n-1})\Big]$$

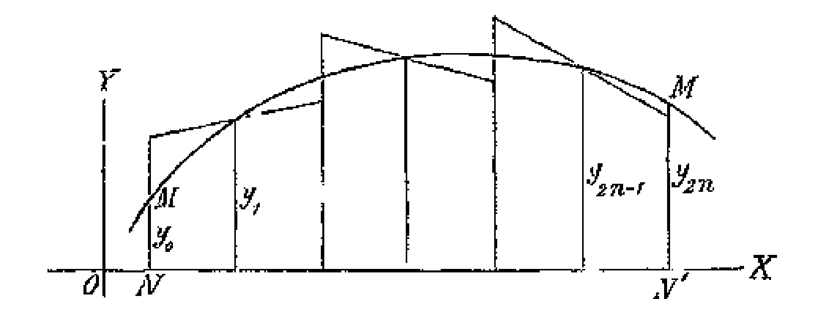
геометрически. Для этого проведемъ ординаты кривой: $y = f(x)$, отвѣчающія абсциссамъ: $a, \alpha, a_1, \alpha_1, a_2, \alpha_2, a_3, \alpha_3, \ldots, a_{n-1}, \alpha_{n-1}, b$.

Пусть эти ординаты: $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$.

Чрезъ верхніе концы ординатъ $y_1, y_3, y_5, \ldots, y_{2n-1}$ проведемъ



касательныя къ кривой, или вообще какія нибудь прямыя, до встрѣчи съ сосѣдними ординатами или ихъ продолженіями. Тогда образуются



трапеціи, площади которыхъ будутъ: ωy_1, ωy_3, ωy_5, . ., ωy_{2n-1}, а сумма этихъ площадей =

$$= \omega (y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) =$$

$$= \omega [f(\alpha) + f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_{2n-1})].$$

Примѣръ:

Вычислимъ *интегралъ* $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ съ точностью до 0,0001.

$$f(x) = e^{-x^2},\ a = 0,\ b = 1,$$

$$(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2},\ (e^{-x^2})'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2},\ (e^{-x^2})''' =$$

$$= 4(3x - 2x^3)e^{-x^2},$$

$$(e^{-x^2})^{(4)} = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2},\ M = 12,\ \frac{7\omega^4 (b - a) M}{5760} = \frac{7\omega^4}{480},$$

$$\frac{7\omega^4}{480} < 0{,}0001,\ \omega^4 < 0{,}00685\ldots,\ \omega < 0{,}28\ldots,$$

$$n = 4,\ \omega = \frac{1}{4},\ \frac{\omega}{2} = \frac{1}{8},$$

$$\alpha = \frac{1}{8},\ \alpha_1 = \frac{3}{8},\ \alpha_2 = \frac{5}{8},\ \alpha_3 = \frac{7}{8},$$

$$f(\alpha) = e^{-\frac{1}{64}},\ f(\alpha_1) = e^{-\frac{9}{64}},\ f(\alpha_2) = e^{-\frac{25}{64}},\ f(\alpha_3) = e^{-\frac{49}{64}},$$

$$f'(1) = (-2xe^{-x^2})_1 = -2e^{-1},\ \ f'(0) = (-2xe^{-x^2})_0 = 0,$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{1}{64}} + e^{-\frac{9}{64}} + e^{-\frac{25}{64}} + e^{-\frac{49}{64}}\right) - \frac{1}{192}e^{-1} + R_1$$

$$\text{абс. вел. } R_1 < \frac{7\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4}{480}$$

$$< 0{,}00006$$

$$\left.\begin{aligned} e^{-\frac{1}{64}} &= 0{,}984496 \\ e^{-\frac{9}{64}} &= 0{,}868815 \\ e^{-\frac{25}{64}} &= 0{,}676634 \\ e^{-\frac{49}{64}} &= 0{,}465043 \\ e^{-1} &= 0{,}367879 \end{aligned}\right| \quad \left(\begin{matrix}\text{съ точностью} \\ \text{до } 0{,}000001.\end{matrix}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{1}{64}} + e^{-\frac{9}{64}} + e^{-\frac{25}{64}} + e^{-\frac{49}{64}}\right) - \frac{1}{192}e^{-1} = 0{,}74683 \; \left(\begin{matrix}\text{съ точност.} \\ \text{до } 0{,}00001\end{matrix}\right)$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}7468 \text{ (съ точностью до } 0{,}0001).$$

386. Формулы квадратуръ могутъ служить не только къ вычисленію опредѣленныхъ интеграловъ при посредствѣ суммъ значеній подъинтегральныхъ функцій, но и наоборотъ: **къ вычисленію суммъ помощію опредѣленныхъ интеграловъ.**

Такъ изъ формулы n^0 381 имѣемъ:

$$f(a) + f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-1}) + f(b) =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\omega}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right] - \frac{\omega^3(b-a)}{720}f^{(4)}(a\cdot\bar{b}).$$

Если $f(x)$ цѣлая функція, и при томъ не выше четвертой степени, то послѣдняя формула доставитъ намъ сумму:

$$f(a) + f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-1}) + f(b)$$

съ совершенною точностью: потому что тогда $f^{(4)}(x)$ есть число постоянное, когда $f(x)$ четвертой степени, и равна 0, когда $f(x)$ ниже четвертой степени.

Пусть напр.: $a = 0$, $b = n$, и слѣдовательно $\omega = 1$; тогда:

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + f(n) =$$

$$= \int_0^n f(x)\,dx + \frac{f(0)+f(n)}{2} + \frac{f'(n)-f'(0)}{12} - \frac{nf^{(4)}(\overline{0,n})}{720}.$$

Полагая послѣдовательно: $f(x) = x$, x^2, x^3 и x^4, получимъ:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \int_0^n x dx + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \int_0^n x^2 dx + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \int_0^n x^3 dx + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} =$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{1.2}\right]^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \int_0^n x^4 dx + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{1.2.3.5}.$$

Интегрированіе посредствомъ строкъ.

387. Пусть:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + R.$$

Предполагая всѣ эти функціи сплошными на протяженіи x отъ a до b, и интегрируя $f(x)\,dx$ въ предѣлахъ отъ a до b, получимъ:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx + \int_a^b R\,dx.$$

Если въ разложеніи $f(x)$ остаточный членъ R, при всякомъ значеніи x между a и b, стремится къ 0 съ возрастаніемъ n, то и остаточный членъ въ разложеніи интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, т. е. интегралъ $\int_a^b Rdx$, также стремится къ 0. Дѣйствительно: обозначая среднее ариѳметическое изъ всѣхъ значеній функціи R, при измѣненіи x отъ a до b, чрезъ R_1, имѣемъ:

$$\int_a^b Rdx = (b - a)\,R_1.$$

Если R стремится къ 0 при всякомъ x между a и b, то и R_1 стремится къ 0; а по этому и

$$\text{пред.}\ \int_a^b Rdx = (b - a)\ \text{пред.}\ R_1 = 0.$$

И такъ: если:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots,$$

то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b f_3(x)dx + \ldots\ldots,$$

т. е. *если $f(x)$, при всякомъ значеніи x между a и b, развертывается въ безконечный сходящійся рядъ, то и тотъ рядъ, который получается чрезъ интегрированіе членовъ перваго въ предѣлахъ отъ a до b, будетъ также сходящимся, и суммою его будетъ интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Опираясь на эту теорему, легко подтвердить выведенное въ n° 136 правило находить разложеніе функціи по разложенію ея производной. Дѣйствительно, если:

$$f'(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots\ldots,$$

то, интегрируя въ предѣлахъ отъ 0 до x, получимъ:

$$\int_0^x f'(x)\,dx = f(x) - f(0) = a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2} + \frac{a_3 x^3}{3} + \frac{a_4 x^4}{4} + \ldots\ldots;$$

откуда:

$$f(x) = f(0) + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2} + \frac{a_3 x^3}{3} + \frac{a_4 x^4}{4} + \ldots\ldots,$$

Примѣры:

a) При всякомъ значеніи x имѣемъ:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \frac{x^8}{1.2.3.4} - \frac{x^{10}}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots,$$

по этому:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{1.2}\int_0^1 x^4\,dx -$$

$$- \frac{1}{1.2.3}\int_0^1 x^6\,dx + \frac{1}{1.2.3.4}\int_0^1 x^8\,dx - \ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{11} + \ldots\ldots$$

Если примемъ во вниманіе восемь членовъ въ этомъ разложеніи, то съ погрѣшностью, мѣньшею 0,00001, получимъ:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}74682.$$

b) Отъ дѣленія 1 на $1 + x^2$ имѣемъ:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}, \quad (1)$$

откуда:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2\,dx + \int_0^x x^4\,dx - \int_0^x x^6\,dx + \ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \int_0^x x^{2n}\,dx + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{x^{2n+2}\,dx}{1+x^2},$$

или:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{x^{2n+2}\,dx}{1+x^2} \qquad (2)$$

Разложенія (1) и (2) имѣютъ мѣсто при всякомъ значеніи x; но сумма безконечнаго ряда:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots$$

тогда только выражаетъ функцію $\frac{1}{1+x^2}$, когда остаточный членъ $(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ стремится къ 0 съ возрастаніемъ n, т. е. когда $x \gtrless {-1 \atop 1}$; слѣдовательно, при условіи $x \gtrless {-1 \atop 1}$, сумма:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

выражаетъ интегралъ $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$, или, что все равно, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$.

Но не трудно видѣть, что послѣдняя сумма выражаетъ $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ и при $x = \pm 1$. Дѣйствительно: функціи x^{2n+2} и $\frac{1}{1+x^2}$ сплошныя и сохраняютъ знакъ $+$ при всѣхъ значеніяхъ x, какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ; по этому, опираясь на n° 379, имѣемъ:

$$\int_0^x \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{1+\theta^2 x^2}\int_0^x x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{1+\theta^2 x^2} \cdot \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \qquad \left(\theta \gtrless {0 \atop 1}\right).$$

Стало-быть абсолютная величина остаточнаго члена въ разложеніи (2) при $x = \pm 1$ будетъ: $\frac{1}{1+\theta^2} \cdot \frac{1}{2n+3}$; а это произведеніе стремится къ 0, потому что второй множитель его стремится къ 0, а первый заключается между $\frac{1}{2}$ и 1.

И такъ при $x \gtrless {-1 \atop 1}$, а также при $x = \pm 1$, имѣемъ:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots {}^{*}).$$

c) Считая $\begin{matrix} x > -1 \\ < \;\;\; 1 \end{matrix}$, и разлагая $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ по биному Ньютона, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \ldots;$$

а отсюда:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x dx + \frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx + \frac{1.3}{2.4}\int_0^x x^4 dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}\int_0^x x^6 dx + \ldots,$$

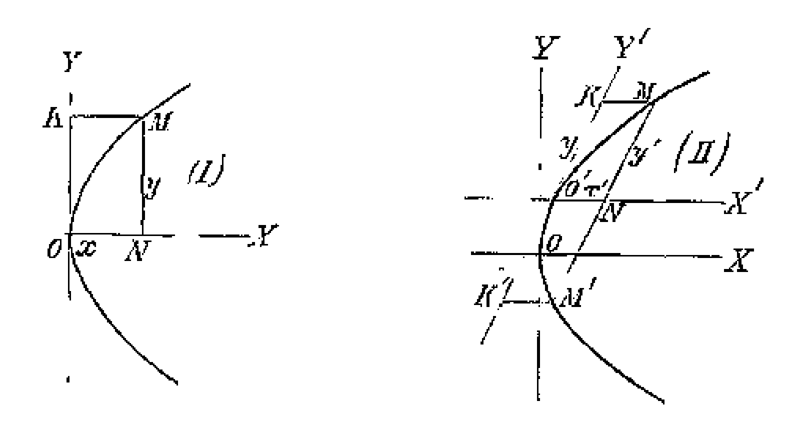
или:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

Въ n° 137 мы видѣли, что формула эта вѣрна не только при $\begin{matrix} x > -1 \\ < \;\;\; 1 \end{matrix}$, но и при $x = \pm 1$.

Площади криволинейныхъ фигуръ.

388. Площадь параболы. Изъ уравненія параболы относительно оси и вершины при прямоугольныхъ осяхъ (чертежъ I) имѣемъ: $y = \sqrt{2p}\,\sqrt{x}$;



*) Разложеніе это было выведено выше по формулѣ Маклорена.

по этому: *площ.* $OMN = \int_0^x y dx = \sqrt{2p}\int_0^x \sqrt{x}.dx = \frac{2}{3}x\sqrt{2px} =$

$$= \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3} \text{ площ. прямоугольника } OKMN.$$

Площадь параболическаго сегмента $MO'M'$ найдемъ, разсматривая уравненіе параболы относительно діаметра $O'X'$, сопряженнаго хордѣ MM', и касательной, параллельной этой хордѣ. Уравненіе это:

$$y'^2 = 2p'x' \left(p' = \frac{p}{\sin^2\varphi}, \ \varphi \text{ уголъ } Y'O'X'\right), \text{ (черт. II)}.$$

Слѣдовательно:

$$\text{площ. } O'MN = \sin\varphi \int_0^{x'} y'\,dx' = \frac{2}{3}x'y'\sin\varphi = \frac{2}{3} \text{ площ. } O'KMN.$$

Также найдемъ: *площ.* $O'M'N = \frac{2}{3}$ *площ.* $O'K'M'N$; а потому:

$$\text{площ. сегм. } MO'M' = \frac{2}{3} \text{ площ. параллелограма } KMM'K'.$$

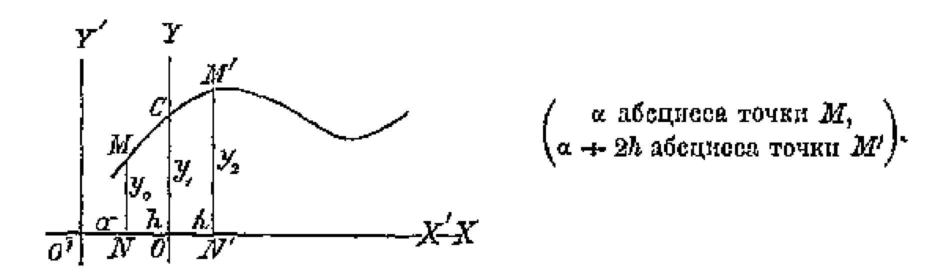
Между прочимъ видимъ, что: *площ.* $O'MN =$ *площ.* $O'M'N$.

389. Пусть кривая MCM' параболическая третьяго порядка; уравненіе ея относительно осей $O'X'$ и $O'Y'$:

$$y' = Ax'^3 + Bx'^2 + Cx' + D$$

$$\text{площ.} NMM'N' = \int_\alpha^{\alpha+2h} (Ax'^3 + Bx'^2 + Cx' + D)\,dx'.$$

Выразимъ эту площадь въ трехъ ординатахъ: y_0, y_1 и y_2.



Для упрощенія интегрированія перенесемъ начало координатъ въ

точку O (середину линіи NN'). Уравненіе кривой отъ этого измѣнится, но видъ его будетъ тотъ же.

Пусть (относительно OX и OY) оно будетъ:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + \partial;$$

тогда:

$$\text{площ. } NMM'N' = \int_{-h}^{+h} (ax^3 + bx^2 + cx + \partial)\, dx = 2\int_0^h (bx^2 + \partial)\, dx$$

$$= \frac{h}{3}(2\,bh^2 + 6\,\partial).$$

Подставляя координаты точекъ $M(-h, y_0)$, $C(0, y_1)$ и $M'(h, y_2)$ въ уравненіе кривой, получимъ:

$$y_0 = -ah^3 + bh^2 - ch + \partial,\ y_1 = \partial,\ y_2 = ah^3 + bh^2 + ch + \partial,$$

откуда:

$$2bh^2 + 6\partial = y_0 + 4y_1 + y_2.$$

Слѣдовательно:

$$\text{площ. } NMM'N' = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Также выражается площадь въ трехъ ординатахъ (равно отстоящихъ) и для параболы втораго порядка (обыкновенной параболы), при оси ординатъ параллельной оси параболы.

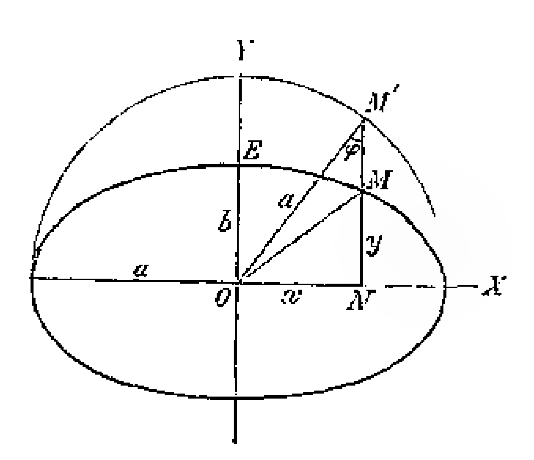
Это можно вывести тѣмъ же путемъ, или заключить изъ того, что полученный результатъ не зависитъ отъ a, и поэтому годится и при $a = 0$, при чемъ уравненіе параболы третьяго порядка обращается въ уравненіе обыкновенной параболы съ осью, параллельною оси OY.

Послѣднюю теорему можно примѣнить къ выводу *формулы Симпсона*. Для этого примемъ часть кривой между ординатами y_0 и y_2 (чертежъ n° 384) за параболу третьяго порядка, часть кривой между ординатами y_2 и y_4 за другую параболу третьяго порядка, и т. д.; затѣмъ выразимъ площади между этими ординатами по послѣдней теоремѣ, и сложимъ ихъ. Погрѣшности, которыя мы сдѣлаемъ при этомъ въ каждой площади, будутъ тѣмъ менѣе, чѣмъ менѣе элементы кри-

вой между ординатами, или, стало быть, чѣмъ менѣе разстоянія между ординатами.

Замѣтимъ, что чрезъ три точки параболъ третьяго порядка ($y = ax^3 + bx^2 + cx + д$) можно провесть безчисленное множество, а параболу втораго порядка ($y = bx^2 + cx + д$) — одну.

390. **Площадь эллипса.** Изъ уравненія эллипса относительно его осей, разсматривая y положительнымъ, имѣемъ: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; по этому:



$$\textit{площ. } OEMN = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\cdot dx = \frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a} + \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}$$

$$= \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

Такъ какъ $\frac{xy}{2}$ есть площадь треугольника OMN, то произведеніе $\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ выражаетъ *площадь сектора* OEM.

$$\textit{Вся площадь эллипса} = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi ab.$$

Другой выводъ:

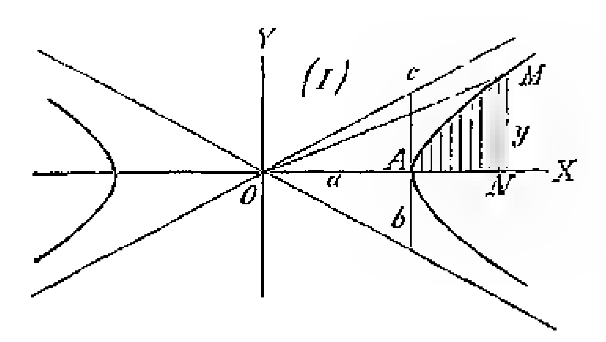
$$\left.\begin{array}{l} x = a\sin\varphi \\ y = b\cos\varphi \end{array}\right\} \text{ уравненія эллипса } \quad \begin{array}{|l} dx = a\cos\varphi\, d\varphi \\ ydx = ab\cos^2\varphi\, d\varphi \end{array}$$

$$\textit{площ. } OEMN = ab\int_0^\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{ab}{2}(\varphi + \cos\varphi\sin\varphi);$$

$$\textit{вся площ. эллипса} = 4\,ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi\,ab.$$

391. Площадь гиперболы. Изъ уравненія гиперболы относительно ея осей:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad \text{(черт. I);}$$



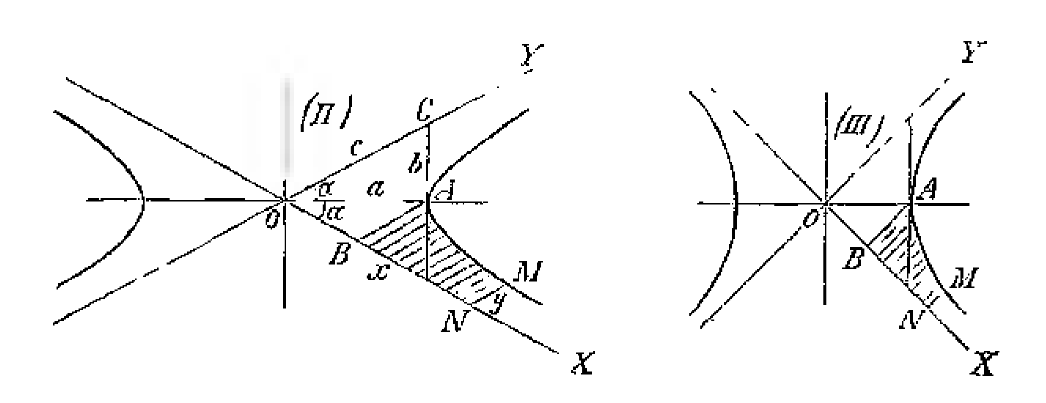
по этому:

$$\textit{площ. } AMN = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\,l\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\,l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Такъ какъ $\frac{xy}{2}$ есть площадь треугольника OMN, то произведеніе $\frac{ab}{2}\,l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$ выражаетъ *площадь фигуры* OAM.

Примемъ теперь ассимптоты гиперболы за оси координатъ, и



найдемъ площадь $ABNM$ (черт. II), заключающуюся между орди-

натою вершины A и ординатою перемѣнной точки $M(x, y)$. Уравненіе гиперболы:

$$xy = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Координаты вершины A одинаковы: $OB = AB = \frac{OC}{2} = \frac{c}{2}$

$$\textit{площ. } ABNM = \sin 2\alpha \int_{\frac{c}{2}}^{x} y dx = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sin 2\alpha \int_{\frac{c}{2}}^{x} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2} \, l \frac{2x}{c} = \frac{ab}{2} \, l \frac{2x}{c}.$$

Для равнобочной гиперболы (черт. III): $a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$;

$$\textit{площ. } ABNM = \frac{c^2}{4} \, l \frac{2x}{c}.$$

Если принять $\frac{c}{2}$, т. е. длину линіи OB, за единицу, то:

$$\textit{площ. } ABNM = lx.$$

392. **Площадь циклоиды.**

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= r(1 - \cos\varphi) \end{aligned}\right\} \left(\begin{matrix}\text{уравненія} \\ \text{циклоиды}\end{matrix}\right) \qquad (\text{n}^0\ 208)$$

$$dx = r\,(1 - \cos\varphi)\, d\varphi,\ y dx = r^2\,(1 - \cos\varphi)^2\, d\varphi,$$

$$\textit{площ. } OMN = \int_0^x y dx = r^2 \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{3\varphi + \cos\varphi \sin\varphi - 4\sin\varphi}{2}\, r^2;$$

$$\textit{вся площ. циклоиды} = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^2\, d\varphi = 3\pi r^2$$

= утроенной площади производящаго круга.

393. **Площадь Декартова листа.** Уравненіе Декартова листа въ полярныхъ координатахъ:

$$r = \frac{3a \cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \qquad (\text{n}^0\ 200)$$

$$\textit{площ. сегмента } OGM = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2\, d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\varphi} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\operatorname{tg}\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2} = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}\right]_0^{\varphi} = \frac{3a^2}{2}\left(1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}\right) = \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

Вся площадь Декартова листа $= \frac{3a^2}{2}$ = *утроенной площади треугольника* OAB. Это—*площадь листа* OC, ограниченнаго линіями OEC и OGC. Замѣняя $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ отношеніями $\frac{y}{r}$ и $\frac{x}{r}$, мы выразимъ *площ. сегмента* OGM въ прямоугольныхъ координатахъ:

$$\textit{площ. сегмента } OGM = \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{y^3}{x^3+y^3} = \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{y^3}{3axy} = \frac{ay^2}{2x}.$$

Найдемъ теперь площадь, заключающуюся между вѣтвями кривой, идущими отъ точки O безгранично, и ассимптотою кривой. Пусть эта площадь есть S. Ее можно разсматривать, какъ предѣлъ удвоенной площади фигуры OM_1N_1, когда точка N_1 отходитъ отъ O, приближаясь къ D, или, что все равно, когда точка M_1, двигаясь по кривой, удаляется отъ O безгранично. Принимая во вниманіе уравненіе кривой относительно осей OX_1 и OY_1, имѣемъ:

$$\textit{площ. } OM_1N_1 = \int_0^x y\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^x x\sqrt{\frac{3b+x}{b-x}}\,dx.$$

Мы замѣнили x_1 чрезъ $-x$, и поставили такимъ образомъ знакъ на видъ, считая теперь x уже положительнымъ.

Положимъ: $\frac{3b+x}{b-x} = \operatorname{tg}^2\varphi$; тогда:

$$x = b(\sin^2\varphi - 3\cos^2\varphi) = b(1 - 4\cos^2\varphi)$$

$$dx = 8b\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\textit{площ. } OM_1N_1 = \frac{8b^2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\varphi}(1-4\cos^2\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi = -\frac{4a^2}{\sqrt{3}}\Big(\sin^3\varphi\cos\varphi\Big)_{\frac{\pi}{3}}^{\varphi}$$

$$S = 2 \text{ пред. площ. } OM_1N_1 = -\frac{8a^2}{\sqrt{3}}\left(\sin^3\varphi\cos\varphi\right)_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

$=$ *площади листка* OC.

394. Площадь эпициклоиды.

Уравненія *внѣшней эпициклоиды*:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\left[(1+a)\sin a\varphi - a\sin(1+a)\varphi\right] \\ y &= R\left[(1+a)\cos a\varphi - a\cos(1+a)\varphi\right] \end{aligned}\right\} \quad (\text{n}^0\ 209).$$

Изъ нихъ:

$$dx = (1+a)r\left[\cos a\varphi - \cos(1+a)\varphi\right]d\varphi$$

$$dy = -(1+a)r\left[\sin a\varphi - \sin(1+a)\varphi\right]d\varphi.$$

Дифференціалъ *площади сектора* $OAM = \frac{ydx - xdy}{2} =$

$$= \frac{Rr(1+a)}{2}\Big\{\Big[(1+a)\cos a\varphi - a\cos(1+a)\varphi\Big]\Big[\cos a\varphi - \cos(1+a)\varphi\Big] +$$

$$+\Big[(1+a)\sin a\varphi - a\sin(1+a)\varphi\Big]\Big[\sin a\varphi - \sin(1+a)\varphi\Big]\Big\}\, d\varphi$$

$$= \frac{r^2(1+a)(1+2a)}{2a}(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$\text{площ. сект. } OAM = \frac{r^2(1+a)(1+2a)}{2a}\int_0^{\varphi}(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{r^2(1+a)(1+2a)}{2a}(\varphi - \sin\varphi) \quad (\text{черт. I n}^0\ 209).$$

$$\text{площ. сект. } OABG = \frac{r^2(1+a)(1+2a)}{2a}(\varphi - \sin\varphi)_{2\pi} = \frac{\pi r^2(1+a)(1+2a)}{a}.$$

Если изъ послѣдней площади вычтемъ площадь круговаго сектора $OAKG$, то получимъ площадь $ABGK$, ограниченную вѣтвью ABG эпициклоиды и соотвѣтствующею ей дугою AKG круга. Длина дуги AKG, какъ соотвѣтствующей полному обороту производящаго круга, равна $2\pi r$; по этому:

$$\text{площ. кругов. сект. } OAKG = 2\pi r \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi r^2}{a};$$

слѣдовательно:

$$\text{площ. } ABGK = \frac{\pi r^2}{a}\Big[(1+a)(1+2a)-1\Big] = \pi r^2(3+2a).$$

При $R=\infty$, или, что все равно, при $a=0$, эпициклоида обращается въ циклоиду, и тогда послѣдняя площадь будетъ $3\pi r^2$, что и видѣли въ n^0 392.

При $a=1$, или $r=R$ (черт. III), *площадь, ограниченная вѣтвью $APQSTA$ эпициклоиды* (въ этомъ случаѣ только одна вѣтвь и есть) *и окружностью $ApqstA$*, равна $5\pi r^2$ (*упятеренной площади производящаго круга*).

При $a=\frac{1}{2}$, или $r=\frac{R}{2}$ (черт. IV), *площадь между вѣтвью ABS и полуокружностью AbS*, равна $4\pi r^2$ (*учетверенной площади производящаго круга*).

Для *внутренней эпициклоиды*:

$$\text{площ. сект. } OAM' = \frac{r^2(1-a)(1-2a)}{2a}(\varphi-\sin\varphi) \qquad \text{(черт. II)}$$

$$\text{площ. сект. } OAB'G = \frac{\pi r^2(1-a)(1-2a)}{a}.$$

Вычитая послѣднюю площадь изъ площади круговаго сектора $OAKG$, получимъ площадь $AB'GK$, заключающуюся между вѣтвью $AB'G$ и дугою AKG круга:

$$\text{площ. } AB'GK = \pi r^2(3-2a).$$

При $a=\frac{1}{4}$, или $r=\frac{R}{4}$ (черт. V), *площадь между вѣтвью $AB'G$ и дугою AKG круга*, равна $\frac{5\pi r^2}{2}$ (*двумъ съ половиною площадямъ производящаго круга*).

Повѣримъ этотъ результатъ. Уравненія эпициклоиды въ разсматриваемомъ случаѣ мы представляли подъ видомъ:

$$x = R\sin^3\psi,\ y = R\cos^3\psi,$$

откуда:

$$dx = 3R\sin^2\psi\cos\psi\, d\psi,\ ydx = 3R^2\sin^2\psi\cos^4\psi\, d\psi;$$

стало-быть:

$$\text{площ. сект. } OAB'G = 3R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\cos^4\psi\,d\psi =$$

$$= 3R^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\psi\,d\psi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\psi\,d\psi\right] = 3R^2\left(\frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3\pi R^2}{32} = \frac{3\pi r^2}{2}$$

$$\text{площ. } AB'GK = \text{пл. } OAKG - \text{пл. } OAB'G = 4\pi r^2 - \frac{3\pi r^2}{2} = \frac{5\pi r^2}{2}.$$

395. Площадь циссоиды. Полярное уравненіе *циссоиды*:

$$r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \qquad (\text{n}^0\ 202)$$

$$\text{площ. сегмента } OM = 2a^2\int_0^{\varphi}\frac{\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a^2\int_0^{\varphi}\frac{1-2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\left[\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - 2\int_0^{\varphi}d\varphi + \int_0^{\varphi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right] =$$

$$= 2a^2\left(\operatorname{tg}\varphi - 2\varphi + \frac{\varphi+\cos\varphi\sin\varphi}{2}\right) = a^2(2\operatorname{tg}\varphi + \cos\varphi\sin\varphi - 3\varphi)$$

$$\text{площ. } OM'MN = \int_0^{x} y\,dx; \text{ а такъ какъ:}$$

$$y = r\sin\varphi = \frac{2a\sin^3\varphi}{\cos\varphi}$$

$$x = r\cos\varphi = 2a\sin^2\varphi, \quad dx = 4a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

то:

$$\text{площ. } OM'MN = \int_0^{\varphi} 8a^2\sin^4\varphi\,d\varphi = 8a^2\left(\frac{3\varphi}{8} - \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{8} - \frac{\sin^3\varphi\cos\varphi}{4}\right)$$

$$= a^2\left(3\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin^3\varphi\cos\varphi\right).$$

Для повѣрки сложимъ площади сегмента OM и фигуры $OM'MN$; суммою должна быть площадь прямоугольнаго треугольника OMN, т. е. $\frac{xy}{2}$.

площ. сегм. OM + *площ.* $OM'MN =$

$$= a^2(2\operatorname{tg}\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin^3\varphi\cos\varphi) = \frac{2a^2\sin^5\varphi}{\cos\varphi} = \frac{xy}{2}.$$

Площадь фигуры $OM'MN$ можно найти и по уравненію циссоиды въ прямоугольныхъ координатахъ:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$$

Она выразится интеграломъ:

$$\int_0^x x\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \cdot dx.$$

Изъ найденныхъ выраженій площадей сегмента OM и фигуры $OM'MN$ видно, что съ возрастаніемъ долготы φ и приближеніемъ ея къ $\frac{\pi}{2}$, первая площадь ростетъ безгранично, а вторая подходитъ къ $\frac{3\pi a^2}{2}$. Отсюда заключаемъ, что *площадь между вѣтвями циссоиды и ея ассимптотою* равна $3\pi a^2$, т. е. *утроенной площади круга* OB. Если бы мы прямо пожелали эту площадь выразить интеграломъ, то, обозначая ее чрезъ S, нашли-бы:

$$S = 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi = 16a^2 \cdot \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2.$$

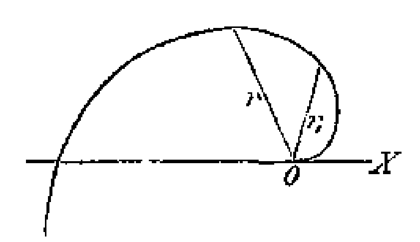
396. Площадь сектора, ограниченнаго Архимедовой спиралью:

$$r = a\varphi \qquad (\text{n}^0\ 204)$$

и двумя радіусами векторами r и r_1, отвѣчающими долготамъ φ и φ_1, равна:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{r^2}{2} d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi} \varphi^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\varphi^3}{2}\right)_{\varphi_1}^{\varphi} = \frac{a^2(\varphi^3 - \varphi_1^3)}{6} = \frac{r^3 - r_1^3}{6a}.$$

Если r_1 соотвѣтствуетъ долготѣ $\varphi_1 = 0$, то $r_1 = 0$; тогда секторъ обращается въ сегментъ, и площадь его будетъ: $\frac{a^2\varphi^3}{6}$ или $\frac{r^3}{6a}$. Отсюда видимъ, что *площади сегментовъ Архимедовой спирали,*



выходящихъ изъ полюса, пропорціональны кубамъ долготъ или радіусовъ векторовъ ихъ конечныхъ точекъ.

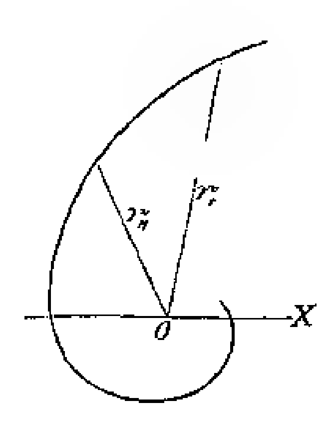
397. Площадь сектора между гиперболическою спиралью:

$$r = \frac{a}{\varphi} \qquad (\text{n}^0\ 205)$$

и двумя радіусами векторами r_1 и r_{11}, отвѣчающими долготамъ φ_1 и φ_{11}, равна:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_{11}} \frac{r^2}{2} d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_{11}} \frac{d\varphi}{\varphi^2} = \frac{a^2}{2} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)_{\varphi_1}^{\varphi_{11}} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_{11}}\right) = \frac{a}{2}(r_1 - r_{11})$$

(φ_{11} болѣе φ_1, и стало быть r_{11} менѣе r_1).

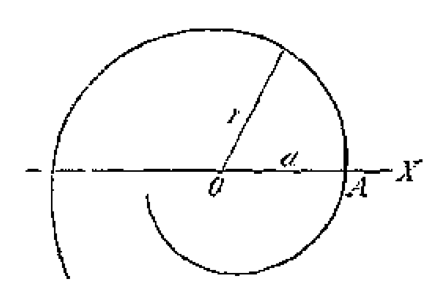


398. Площадь сектора, заключающагося между логариѳмическою спиралью:

$$r = ae^{\alpha\varphi} \qquad (\text{n}^0\ 206)$$

и двумя радіусами векторами, отвѣчающими долготамъ 0 и φ, равна:

$$\int_0^{\varphi} \frac{r^2}{2} d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\varphi} e^{2\alpha\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{4\alpha}\left(e^{2\alpha\varphi} - 1\right) = \frac{r^2 - a^2}{4\alpha}.$$



Длины дугъ кривыхъ линій.

399. Если s длина дуги плоской кривой отъ постоянной точки (x_0, y_0) до перемѣнной (x, y), то, въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ, имѣемъ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[1 + (y'_x)^2\right] dx^2 = \left[1 + (x'_y)^2\right] dy^2,$$

откуда:

$$ds = \pm\sqrt{1 + (y'_x)^2} \cdot dx\,, \text{ или } ds = \pm\sqrt{1 + (x'_y)^2} \cdot dy\,,$$

гдѣ передъ корнемъ слѣдуетъ взять знакъ + или —, смотря по тому, увеличивается-ли дуга, или уменьшается съ возрастаніемъ независимой перемѣнной. Стало-быть:

$$s = \pm\int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx\,, \text{ или } s = \pm\int_{y_0}^{y} \sqrt{1 + (x'_y)^2} \cdot dy.$$

Въ случаѣ независимой перемѣнной t, значеніе которой для точки (x_0, y_0), положимъ, t_0, имѣли-бы:

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot dt\,, \; s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt\,,$$

предполагая дугу возрастающею съ возрастаніемъ t.

Въ полярныхъ координатахъ:

$$ds = \pm\sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2} = \pm\sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} \cdot d\varphi$$

$$s = \pm\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} \cdot d\varphi\,,$$

если дуга считается отъ точки, которой долгота φ_0, до точки (r, φ).

Для дуги двоякой кривизны:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$s = \pm \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (z'_x)^2} \cdot dx,$$

или:

$$s = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} \cdot dt,$$

а въ случаѣ полярныхъ координатъ:

$$s = \pm \int \sqrt{r^2 \, d\varphi^2 + dr^2 + r^2 \sin^2 \varphi \, d\psi^2}.$$

400. Длина дуги параболы. Изъ уравненія ($y^2 = 2px$) параболы:

$$ydy = pdx, \; dx = \frac{ydy}{p},$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{y^2+p^2}{p^2} dy^2, \; ds = \frac{dy}{p} \sqrt{y^2 + p^2}.$$

Считая дугу s отъ вершины параболы (0,0) до точки (x, y):

$$s = \frac{1}{p} \int_0^y \sqrt{y^2 + p^2} \, dy = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2} \, l \, \frac{y + \sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

401. Длина дуги эллипса. Длины дугъ эллипса и гиперболы приводятся къ эллиптическимъ интеграламъ. Мы развернемъ эти интегралы въ строки, съ помощію которыхъ можно будетъ вычислять ихъ съ какою угодно степенью приближенія.

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin \varphi \\ y &= b \cos \varphi \end{aligned}\right\} \text{ уравненія эллипса } \quad \begin{aligned} dx &= a \cos \varphi \, d\varphi \\ dy &= -b \sin \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

$$ds^2 = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \, d\varphi^2 = a^2 \, (1 - e^2 \sin^2 \varphi) \, d\varphi^2 \quad \left(\text{e эксцентрисиситетъ эллипса}\right)$$

$$ds = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi.$$

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad \left(\text{считая дугу отъ точки $(0, b)$, въ которой: $\varphi = 0$}\right)$$

$$\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2.4}e^4\sin^4\varphi-\frac{1.3}{2.4.6}e^6\sin^6\varphi-$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}e^8\sin^8\varphi-\ldots.$$

$$s=a\left[\int_0^\varphi d\varphi-\frac{1}{2}e^2\int_0^\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2.4}e^4\int_0^\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1.3}{2.4.6}e^6\int_0^\varphi\sin^6\varphi\,d\varphi-\ldots.\right]=$$

$$=a\left[\varphi-\frac{1}{2}e^2.\frac{\varphi-\cos\varphi\sin\varphi}{2}-\frac{1}{2.4}e^4.\frac{3\varphi-3\cos\varphi\sin\varphi-2\cos\varphi\sin^3\varphi}{8}-\ldots\right]\quad(1)$$

Длина всего обвода эллипса $=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$

$$=4a\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\frac{1}{2}e^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2.4}e^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1.3}{2.4.6}e^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\,d\varphi-\ldots.\right]$$

$$=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2-\ldots\right]\quad(2)$$

Быстрота сходимости строкъ (1) и (2) тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе эксцентриситетъ эллипса.

402. Длина дуги гиперболы.

$$\left.\begin{aligned}x&=a\sec\varphi\\ y&=b\,\mathrm{tg}\,\varphi\end{aligned}\right\}\text{ уравненія гиперболы}\quad\left|\quad\begin{aligned}dx&=a\sec\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi\\ dy&=b\sec^2\varphi\,d\varphi\end{aligned}\right.$$

$$ds^2=(a^2\,\mathrm{tg}^2\varphi+b^2\sec^2\varphi)\sec^2\varphi\,d\varphi^2=\frac{a^2\sin^2\varphi+b^2}{\cos^4\varphi}d\varphi^2$$

$$=\frac{a^2(e^2-\cos^2\varphi)}{\cos^4\varphi}d\varphi^2=a^2e^2\left(1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}\right)\frac{d\varphi^2}{\cos^4\varphi},$$

$$ds=ae\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}}.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\qquad\left(\text{e эксцентриситетъ гиперболы}\right).$$

$$s = ae\int_0^\varphi \sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \quad \left(\begin{matrix}\text{считая дугу отъ вершины}\\ (a,\ 0),\ \text{въ которой}\ \varphi=0\end{matrix}\right),$$

$$\left(1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{e^2}-\frac{1}{2.4}\frac{\cos^4\varphi}{e^4}-\frac{1.3}{2.4.6}\frac{\cos^6\varphi}{e^6}-$$
$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{\cos^8\varphi}{e^8}-\ldots.$$

$$s = ae\left[\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2}\int_0^\varphi d\varphi-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{e^4}\int_0^\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi-\right.$$
$$\left.-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e^6}\int_0^\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi\ \ldots.\right]$$
$$= a\left[e\operatorname{tg}\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\varphi-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{e^3}\cdot\frac{\varphi+\cos\varphi\sin\varphi}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e^5}\frac{3\varphi+3\cos\varphi\sin\varphi+2\cos^3\varphi\sin\varphi}{8}-\ldots.\right].$$

Строка здѣсь тѣмъ быстрѣе сходящаяся, чѣмъ болѣе эксцентриситетъ гиперболы.

403. **Длина дуги циклоиды.** Изъ уравненій циклоиды имѣемъ:

$$dx = r(1-\cos\varphi)\,d\varphi,\ dy = r\sin\varphi\,d\varphi;$$

поэтому:

$$ds^2 = r^2\left[(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi\right]d\varphi^2 = 2r^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi^2 =$$
$$= 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi^2,$$

$$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

$$s = 2r\int_0^\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8r\sin^2\frac{\varphi}{4}\left(\begin{matrix}\text{считая дугу отъ точки}\\ (0,\ 0),\ \text{въ которой}\ \varphi=0\end{matrix}\right).$$

Длина всей вѣтви циклоиды $= 8r$ *(восьми радіусамъ производящаго круга).*

404. **Длина дуги эпициклоиды.**

Для внѣшней эпициклоиды:

$$dx = (1 + a)\, r\, [\cos a\varphi - \cos (1 + a)\, \varphi]\, d\varphi =$$

$$= 2\,(1 + a)\, r\, \sin\frac{\varphi}{2} \sin\left(a\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi,$$

$$dy = -(1 + a)\, r\, [\sin a\varphi - \sin (1 + a)\, \varphi]\, d\varphi =$$

$$= 2\,(1 + a)\, r \sin\frac{\varphi}{2} \cos\left(a\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 4\,(1 + a)^2 r^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi^2,$$

$$ds = 2\,(1 + a)\, r \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi,$$

$$s = 2\,(1 + a)\, r \int_0^{\varphi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8\,(1 + a)\, r \sin^2\frac{\varphi}{4} \left(\begin{array}{c}\text{считая дугу отъ точки}\\ (0,\ R),\ \text{въ которой}\ \varphi = 0\end{array}\right).$$

Длина всей вѣтви $= 8\,(1 + a)\, r$.

При $a = 1$, *длина всей вѣтви* $= 16\, r$ (черт. III n° 209).

При $a = \frac{1}{2}$, *длина всей вѣтви* $= 12\, r$, а *длина обѣихъ вѣтвей вмѣстѣ* $= 24\, r$ (черт. IV n° 209).

Для *внутренней эпициклоиды*:

$$s = 8\,(1 - a)\, r \sin^2\frac{\varphi}{4},$$

а *длина всей вѣтви* $= 8\,(1 - a)\, r$.

При $a = \frac{1}{4}$, *длина всей вѣтви* $— 6\, r$ (черт. V n° 209).

Послѣднюю длину, которую обозначимъ чрезъ s_1, найдемъ иначе; обратимся къ уравненіямъ:

$$x = R \sin^3 \psi,\ y = R \cos^3 \psi;$$

онѣ даютъ:

$$dx = 3\, R \sin^2 \psi \cos \psi\, d\psi,\ dy = -3\, R \cos^2 \psi \sin \psi\, d\psi;$$

по этому:

$$ds^2 = 9\, R^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi\, d\psi^2,\ ds = 3\, R \sin \psi \cos \psi\, d\psi,$$

$$s_1 = 3\, R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \cos \psi\, d\psi = 3\, R \left(\frac{\sin^2 \psi}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3R}{2} = 6\, r.$$

405. Длина дуги Архимедовой спирали. Полярное уравненіе Архимедовой спирали ($r = a\varphi$) дастъ: $dr = a d\varphi$; по этому:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = a\sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi$$

$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{a\varphi\sqrt{1+\varphi^2}}{2} + \frac{a}{2} l\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)$$

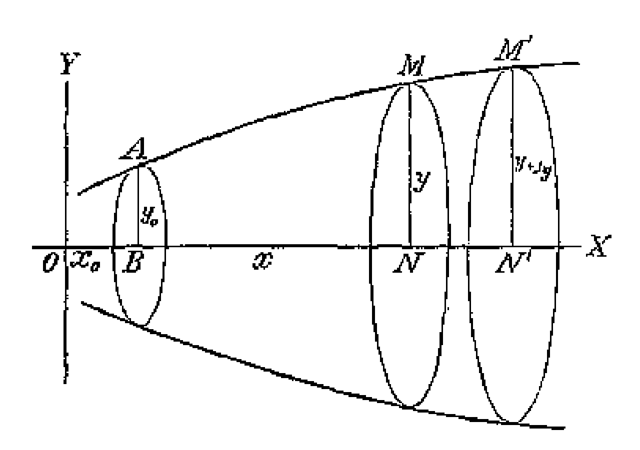
$$= \frac{r\sqrt{a^2+r^2}}{2a} + \frac{a}{2} l \frac{r+\sqrt{a^2+r^2}}{a} \qquad \left(\begin{matrix}\text{дуга считается}\\ \text{отъ точки } (0, 0)\end{matrix}\right).$$

406. Длина дуги винтовой линіи. Въ n° 233 мы имѣли: $ds = r \sec \delta\, d\varphi$; по этому, считая длину дуги отъ точки $(r, 0, 0)$, для которой $\varphi = 0$, получимъ: $s = r \sec\delta \int_0^\varphi d\varphi = r\varphi \sec \delta$.

Объемы тѣлъ вращенія.

407. Вращая около оси OX плоскую фигуру $AMNB$, ограниченную кривою $y = f(x)$, осью OX и ординатами y_0 и y, отвѣчающими абсциссамъ x_0 и x, получимъ *тѣло вращенія*, ограниченное поверхностью, описанною линіею AM, и перпендикулярными къ оси вращенія кругами, радіусы которыхъ y_0 и y.

Пусть V *объемъ* этого тѣла. Разсматривая V какъ функцію x, станемъ искать производную V относительно x; а потомъ отъ производной перейдемъ и къ дифференціалу. Дадимъ x приращеніе $\Delta x = NN'$ въ такой мѣрѣ малое, чтобы между точками M и M' ординаты кривой шли въ одну сторону (или увеличивались, или уменьшались, съ возрастаніемъ x); тогда приращеніе объема (ΔV) будетъ



заключаться между объемами двухъ прямыхъ цилиндровъ, имѣющихъ общую высоту Δx, а основаніями — круги, которыхъ радіусы $MN = y$ и $M'N' = y + \Delta y$; слѣдовательно:

$$\Delta V > \pi y^2 \Delta x \quad < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x \quad \left(\begin{array}{c}\text{если ординаты между}\\ MN \text{ и } M'N' \text{ растутъ}\end{array}\right).$$

$$\Delta V < \pi y^2 \Delta x \quad > \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x \quad \left(\begin{array}{c}\text{если ординаты между } MN\\ \text{и } M'N' \text{ уменьшаются}\end{array}\right).$$

По этому отношеніе $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ заключается между πy^2 и $\pi (y + \Delta y)^2$; стало-быть:

$$\text{пред.} \frac{\Delta V}{\Delta x} = V'_x = \pi y^2,$$

$$dV = \pi y^2 \, dx.$$

Такъ выражается *дифференціалъ объема* V при всякой независимой перемѣнной, если только V растетъ вмѣстѣ съ x. Если же съ возрастаніемъ x объемъ V уменьшается, то: $dV = -\pi y^2 \, dx$. Самый объемъ найдется интегрированіемъ:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 \, dx = \pi \int_{x_0}^{x} [f(x)]^2 \, dx$$

Въ случаѣ вращенія около оси OY:

$$\text{объемъ} = \pi \int_{y_0}^{y} x^2 \, dy$$

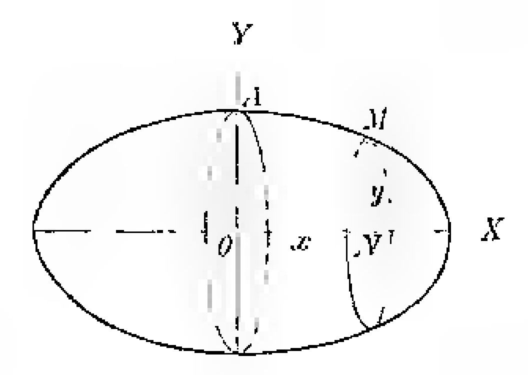
Разсѣкая тѣло вращенія на элементы системою плоскостей, перпендикулярныхъ къ оси вращенія, въ безконечно-малыхъ удаленіяхъ Δx другъ отъ друга, построимъ на кругахъ сѣченій цилиндры съ высотами Δx; объемъ тѣла можно разсматривать, какъ предѣлъ суммы объемовъ этихъ цилиндровъ:

$$V = \text{пред.} \sum_{x_0}^{x} (\pi y^2 \Delta x) = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 \, dx.$$

408. Объемъ эллипсоида вращенія. Если V объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ эллипса $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$ около оси OX, и ограниченнаго кругами, отвѣчающими абсциссамъ 0 и x, то:

$$V=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^x (a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right);$$

$$\text{полный объемъ элл. вращ.}=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$



При $a>b$ послѣднее выраженіе представляетъ объемъ *продолговатаго* эллипсоида вращенія. Если же вращать эллипсъ около малой его оси, то образуется *сжатый* эллипсоидъ вращенія, которого объемъ =

$$\frac{2\pi a^2}{b^2}\int_0^b (b^2-y^2)\,dy=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Объемъ перваго менѣе объема послѣдняго. Отношеніе этихъ объемовъ равно отношенію b къ a.

Объемъ эллипсоида вращенія (продолговатаго, или сжатаго) составляетъ *двѣ трети объема, описаннаго около него прямаго цилиндра, котораго ось совпадаетъ съ осью вращенія.* Дѣйствительно: обозначая объемы эллипсоидовъ продолговатаго и сжатаго чрезъ v_1 и v_2, а объемы цилиндровъ, около нихъ описанныхъ, чрезъ V_1 и V_2, имѣемъ:

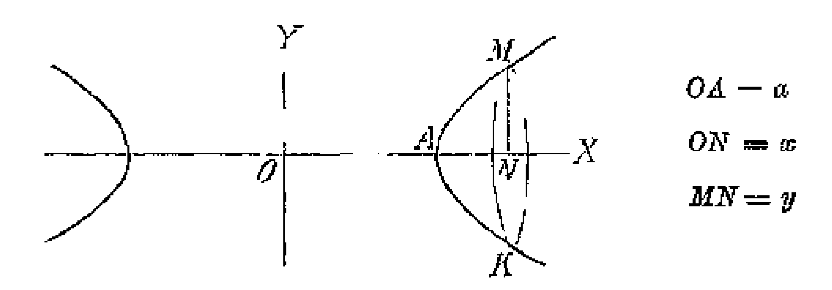
$$v_1=\frac{4}{3}\pi ab^2;\quad V_1=\pi b^2\cdot 2a,\quad \frac{v_1}{V_1}=\frac{2}{3};$$

$$v_2 = \frac{4}{3}\pi a^2 b\,,\ V_2 = \pi a^2 \cdot 2b\,,\ \frac{v_2}{V_2} = \frac{2}{3}.$$

409. Объемъ гиперболоида вращенія.

a) *Объемъ двуполаго гиперболоида вращенія* (ось вращенія — пересѣкающая ось гиперболы).

V объемъ производимый вращеніемъ фигуры AMN около OX.

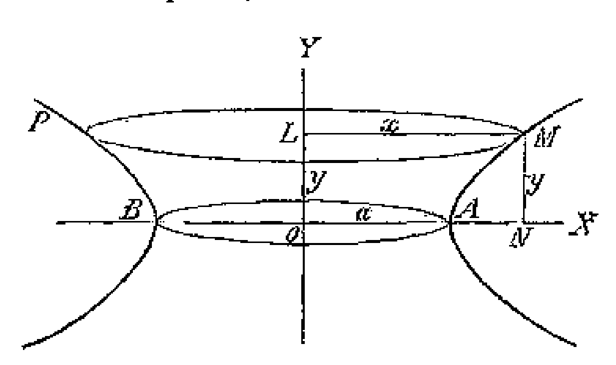


$$V = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_a^x (x^2 - a^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{3a^2}\left(x^3 - 3a^2x + 2a^3\right) =$$

$$= \pi y^2 \cdot \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\pi b^3 (x - a) =$$

= разности между объемомъ конуса, котораго основаніе кругъ MK, а вершина въ точкѣ O, и половиною объема эллипсоида вращенія, котораго полуоси: b, b и $x—a$.

b) *Объемъ однополаго гиперболоида вращенія* (ось вращенія — непересѣкающая ось гиперболы).



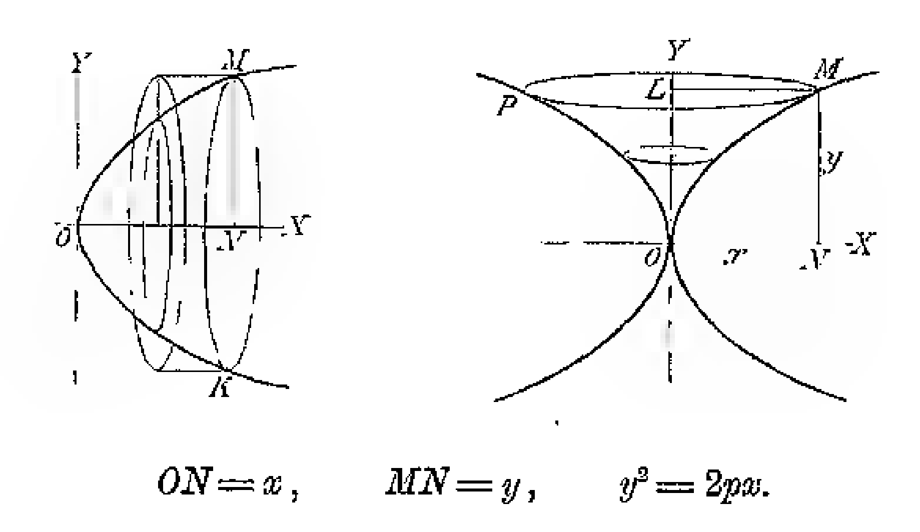
V_1 объемъ, производимый вращеніемъ фигуры $MAOL$ около OY.

$$V_1 = \frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^y (y^2 + b^2)\,dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\left(\frac{y^3}{3} + b^2 y\right) = \frac{\pi a^2 y^3}{3b^2} + \pi a^2 y =$$

$$= \frac{\pi y}{3}(x^2 - a^2) + \pi a^2 y = \pi x^2 \cdot \frac{y}{3} + \pi a^2 \cdot \frac{2}{3} y =$$

= *объему цилиндра, имѣющаго основанiемъ кругъ MP, а высотою* $\frac{1}{3}y$, *сложенному съ объемомъ цилиндра, у котораго основанiе кругъ AB, а высота* $\frac{2}{3}y$.

410. Объемъ параболоида вращенiя.



$$ON = x, \qquad MN = y, \qquad y^2 = 2px.$$

Объемъ, производимый вращенiемъ фигуры OMN около OX, =

$$= \pi \int_0^x y^2\,dx = 2\pi p \int_0^x x\,dx = \pi p x^2 = \pi y^2 \cdot \frac{x}{2} =$$

= *объему цилиндра, котораго основанiе кругъ MK, а высота* $\frac{x}{2}$.

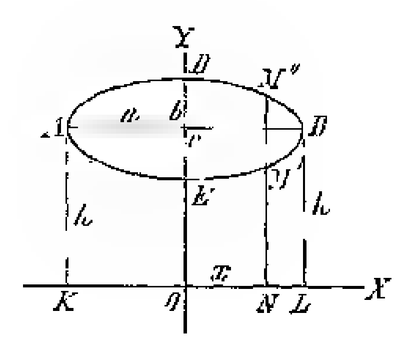
Если же вращать фигуру OML, ограниченную параболою OM и прямыми OL и ML, около оси OY, то произойдетъ *тѣло вращенiя*, котораго *объемъ* =

$$= \pi \int_0^y x^2\,dy = \pi \int_0^y \frac{y^4}{4p^2}\,dy = \frac{\pi y^5}{20p^2} = \pi x^2 \cdot \frac{y}{5} =$$

= *объему цилиндра, имѣющаго основанiемъ кругъ MP, а высотою пятую долю y.*

411. Объемъ кольца, производимаго вращенiемъ эллипса около прямой, параллельной одной изъ его осей.

Примемъ ось вращенія за ось OX, а прямую, перпендикулярную къ оси вращенія и проходящую чрезъ центръ эллипса — за ось OY.



Если разстояніе центра эллипса отъ оси вращенія есть h, то уравненіе эллипса относительно принятыхъ осей координатъ будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-h)^2}{b^2}=1, \text{ откуда: } y=h\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Пусть y_1 и y_{11} ординаты точекъ M' и M'', отвѣчающихъ одной и той же абсциссѣ x; тогда:

$$y_1=h-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ y_{11}=h+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

$$y_{11}+y_1=2h,\ y_{11}-y_1=\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Пусть V искомый объемъ кольца, V_1 и V_{11} объемы, производимые вращеніемъ около OX фигуръ $AEBLK$ и $ADBLK$; тогда:

$$V_1=\pi\int_{-a}^{+a}y_1^2\,dx,\ V_{11}=\pi\int_{-a}^{+a}y_{11}^2\,dx,$$

$$V=V_{11}-V_1=\pi\int_{-a}^{+a}(y_{11}^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_{-a}^{+a}(y_{11}+y_1)(y_{11}-y_1)\,dx=$$

$$=\frac{4\pi bh}{a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{8\pi bh}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx=8\pi abh\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\,d\psi$$

$$=2\pi^2 abh=\pi ab\cdot 2\pi h.$$

Отсюда видимъ, что искомый *объемъ кольца равенъ произведенію площади производящаго эллипса на длину окружности, опи-*

сываемой центромъ этого эллипса; другими словами: *объему цилиндра, имѣющаго основанiемъ производящiй эллипсъ, а высотою длину окружности, описываемой центромъ эллипса.*

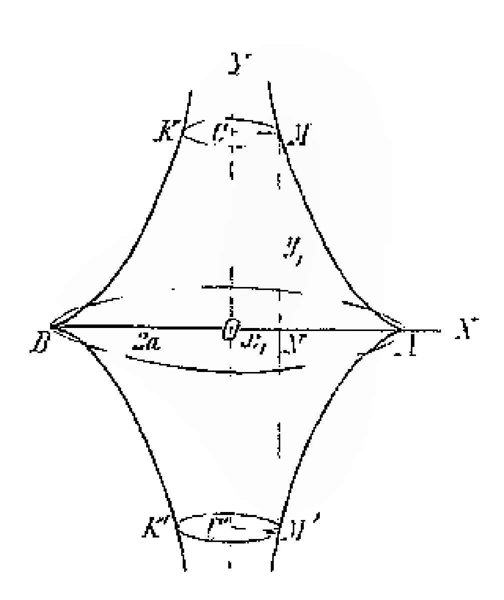
412. Объемъ тѣла, ограниченнаго поверхностью, образуемою вращенiемъ циклоиды около ея основанiя.

$$\left.\begin{array}{l} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = r(1 - \cos\varphi) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi \\ y^2\,dx = r^3(1 - \cos\varphi)^3\,d\varphi = 8r^3 \sin^6\frac{\varphi}{2}\,d\varphi \end{array}$$

$$V = \pi\int_0^{2\pi r} y^2\,dx = 8\pi r^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 16\,\pi r^3\int_0^{\pi}\sin^6\psi\,d\psi =$$

$$= 32\,\pi r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\psi\,d\psi = 32\,\pi r^3\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2} = 5\,\pi^2 r^3.$$

413. Объемъ тѣла, ограниченнаго поверхностью, образуемою вращенiемъ циссоиды около ея ассимптоты.



Если ось циссоиды примемъ за ось OX, а ассимптоту ея за ось OY, то уравненiе ея будетъ:

$$y^2 = \frac{(2a - x)^3}{x}, \text{ или: } y = (2a - x)^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}}.$$

Вращая фигуру $MAM'C'O$ около CC', получимъ тѣло вращенiя,

ограниченное циссоидальною поверхностью вращенія и двумя кругами MK и $M'K'$, перпендикулярными къ оси вращенія. Если V_1 объемъ этого тѣла, а x_1 и y_1 координаты точки M, то:

$$V_1 = 2\pi \int_0^{y_1} x^2\, dy = 2\pi \int_{2a}^{x_1} x^2 y'_x\, dx \quad *);$$

а такъ какъ:

$$y'_x dx = -\left[\frac{3}{2}(2a-x)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} (2a-x)^{\frac{3}{2}}\right] dx,$$

$$x^2 y'_x dx = -\left[\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} (2a-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} (2a-x)^{\frac{3}{2}}\right] dx =$$

$$= -(x+a)\sqrt{(2a-x)x}\, dx,$$

то:

$$V_1 = -2\pi \int_{2a}^{x_1} (x+a)\sqrt{(2a-x)x}\, dx = 2\pi \int_{x_1}^{2a} (x+a)\sqrt{(2a-x)x}\, dx.$$

Если станемъ x_1 приближать къ 0 (при чемъ y_1 будетъ расти безгранично), то разсматриваемое тѣло будетъ удлинняться вдоль оси вращенія въ ту и другую сторону безгранично, становясь при этомъ тоньше, а объемъ его будетъ увеличиваться, подходя къ искомому. По этому, обозначая искомый объемъ чрезъ V, имѣемъ:

$$V = \text{пред. } V_1 = 2\pi \int_0^{2a} (x+a) \sqrt{(2a-x)x}\, dx.$$

Сдѣлаемъ положеніе: $x = 2a \sin^2 \psi$; тогда:

$$2a - x = 2a\cos^2\psi,\ x + a = a\,(1 + 2\sin^2\psi),$$

$$\sqrt{(2a-x)x} = 2a\cos\psi\sin\psi,\ dx = 4a\sin\psi\cos\psi\, d\psi,$$

$$V = 16\,\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin^2\psi)\sin^2\psi\cos^2\psi\, d\psi =$$

$$= 16\,\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\psi + \sin^4\psi - 2\sin^6\psi)\, d\psi$$

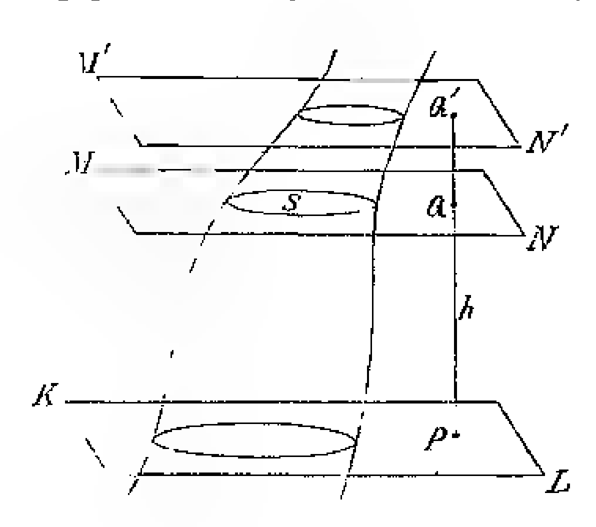
*) Въ первомъ изъ этихъ двухъ интеграловъ предѣлы интегрированія относятся къ y, во второмъ къ x.

$$= 16\,\pi a^3\left(\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-2\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\frac{\pi}{2}=2\pi^2 a^3=\pi a^2\cdot 2\pi a.$$

Отсюда видимъ, что объемъ этотъ равенъ *объему цилиндра, имѣющаго основаніемъ кругъ, котораго радіусъ a, а высотою — прямую, равную длинѣ окружности этого круга.*

Объемы нѣкоторыхъ тѣлъ, не принадлежащихъ къ тѣламъ вращенія.

414. Объемы тѣлъ вообще, какъ увидимъ послѣ, вычисляются двойнымъ или тройнымъ интегрированіемъ; но въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, какъ и объемы тѣлъ вращенія, могутъ быть найдены одиночнымъ интегрированіемъ. Пусть V объемъ тѣла, ограниченнаго



поверхностью и двумя параллельными плоскостями KL и MN; h разстояніе между этими плоскостями, и S площадь сѣченія тѣла плоскостью MN. Объемъ V и площадь S можно разсматривать какъ функціи разстоянія h.

Найдемъ производную V относительно h. Для этого дадимъ h приращеніе $\Delta h = QQ'$; тогда объемъ V получитъ приращеніе ΔV, заключающееся между параллельными плоскостями MN и $M'N'$. Это приращеніе объема можно представить произведеніемъ: $(S + \omega)\,\Delta h$, гдѣ абсолютная величина ω выражаетъ площадь, зависящую отъ h и Δh, и стремящуюся къ 0 вмѣстѣ съ Δh; стало-быть:

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = S + \omega,$$

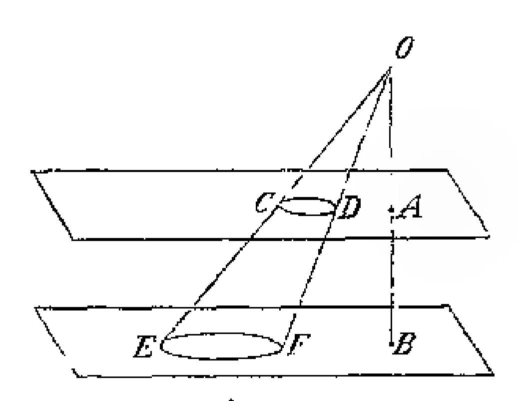
$$V'_h = \text{пред.} \frac{\Delta V}{\Delta h} = S, \; dV = S\,dh;$$

$$V = \int_0^h S\,dh.$$

И такъ: если извѣстно выраженіе *площади* S въ функціи h, то послѣднимъ интегрированіемъ найдемъ и *объемъ* V.

Въ сущности тутъ два интегрированія: потому что площадь S, вообще говоря, сама по себѣ также ищется интегрированіемъ; по этому мы вопросъ объ объемѣ считаемъ здѣсь приведеннымъ къ одиночному интегрированію тогда только, когда отысканіе площади S не потребуетъ интегрированія.

415. Объемъ конуса.



Пусть S_1 и S площади основанія EF и сѣченія CD конуса OEF, h_1 и h разстоянія вершины O отъ плоскостей основанія и сѣченія, V объемъ конуса OEF; тогда:

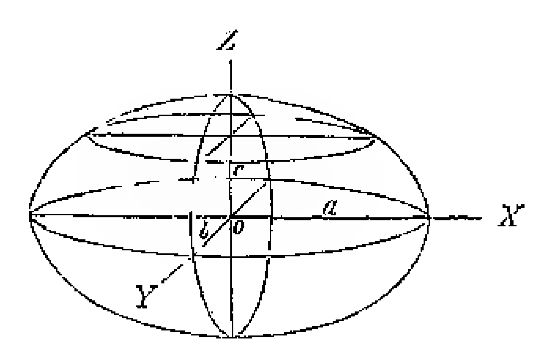
$$S : S_1 = h^2 : h_1^2, \text{ откуда: } S = \frac{S_1 h^2}{h_1^2};$$

слѣдовательно:

$$V = \int_0^{h_1} S\,dh = \frac{S_1}{h_1^2} \int_0^{h_1} h^2\,dh = S_1 \frac{h_1}{3},$$

т. е. *объемъ конуса равенъ произведенію площади его основанія на треть высоты.*

416. Объемъ эллипсоида. Уравненіе поверхности эллипсоида относительно его осей: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Уравненіе плоскости, параллельной плоскости XY и отстоящей отъ нея на разстояніе h:

$$z = h;$$

а оба уравненія въ совокупности относятся къ линіи сѣченія этихъ поверхностей. Изъ нихъ находимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \text{ или: } \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1;$$

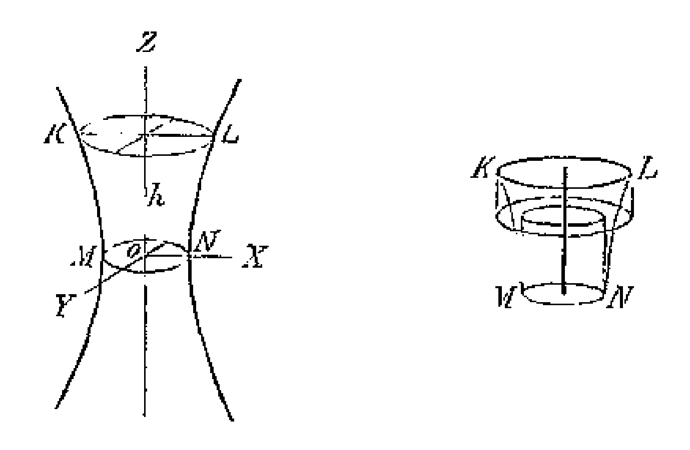
стало-быть сѣченіе есть эллипсъ, котораго полуоси: $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, и котораго по этому площадь $= \pi ab\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)$.

И потому, обозначая объемъ всего эллипсоида чрезъ V, имѣемъ:

$$V = 2\pi ab \int_0^c \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) dh = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Изъ сравненія найденнаго *объема эллипсоида* съ *объемомъ описаннаго около него цилиндра* легко видѣть, что *первый объемъ составляетъ двѣ трети послѣдняго*, будетъ-ли описанный цилиндръ имѣть основаніемъ эллипсъ съ полуосями a и b, а высотою $2c$, или: основаніемъ—эллипсъ съ полуосями a и c, а высотою $2b$, или наконецъ: основаніемъ эллипсъ съ полуосями b и c, а высотою $2a$.

417. Объемъ однополаго гиперболоида.



Уравненіе поверхности однополаго гиперболоида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Пересѣчемъ эту поверхность плоскостью: $z = h$; пусть сѣченіе будетъ KL; уравненія его:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,,\ z = h\,;$$

изъ нихъ видимъ, что сѣченіе KL есть эллипсъ, котораго полуоси: $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$ и $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$, и котораго стало-быть площадь равна $\pi ab\left(\frac{h^2}{c^2}+1\right)$. Пусть V объемъ части гиперболоида между плоскостями: $z = 0$ и $z = h$, т. е. части ML.

$$V = \pi ab\int^{h}\left(\frac{h^2}{c^2}+1\right)dh = \pi ab\left(\frac{h^3}{3c^2}+h\right) =$$

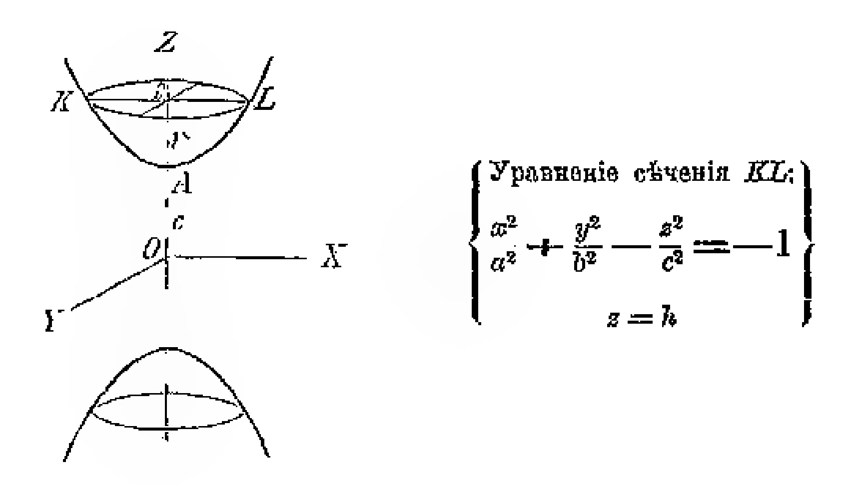
$$= \pi ab\left(\frac{h^2}{c^2}+1\right)\frac{h}{3} + \pi ab\cdot\frac{2}{3}h.$$

Если обозначимъ площадь эллипса MN (горло гиперболоида) чрезъ S_{I}, а площадь эллипса KL чрезъ S_{II}, то:

$$V = S_{\text{II}}\frac{h}{3} + S_{\text{I}}\frac{2}{3}h.$$

Слѣдовательно: *объемъ* ML *равенъ суммѣ объемовъ двухъ цилиндровъ, изъ которыхъ одинъ имѣетъ основаніемъ эллипсъ* KL, *а высотою* $\frac{h}{3}$, *а другой—основаніемъ эллипсъ* MN, *а высотою* $\frac{2}{3}h$.

418. Объемъ двуполаго гиперболоида.



Сѣченіе KL — эллипсъ, котораго полуоси: $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ и $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, а площадь: $\pi ab\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)$.

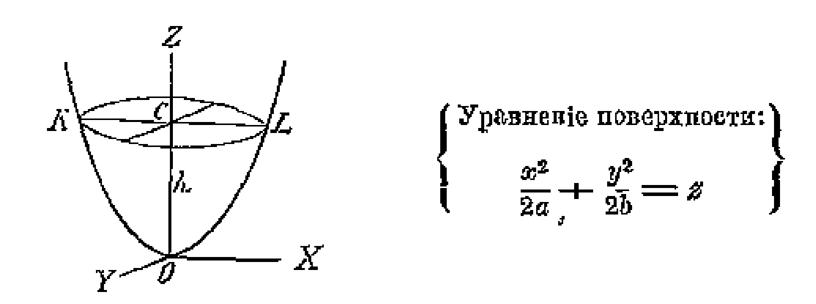
Пусть V объемъ части AKL гиперболоида, S площадь сѣченія KL и r разность $h-c$, т. е. длина AC; тогда:

$$V=\pi ab\int_c^h\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)dh=\pi ab\left(\frac{h^3}{3c^2}-h+\frac{2c}{3}\right)=$$

$$=S\cdot\frac{h}{3}-\frac{2}{3}\pi abr=$$

разности между объемомъ конуса, котораго основаніе эллипсъ KL, а вершина въ точкѣ O, и половиною объема эллипсоида, котораго полуоси a, b и r.

419. Объемъ эллиптическаго параболоида.



Разсѣчемъ поверхность плоскостью: $z=h$; въ сѣченіи будетъ

эллипсъ KL, котораго полуоси: $\sqrt{2ah}$ и $\sqrt{2bh}$, а площадь $2\pi h\sqrt{ab}$; по этому, обозначая объемъ части OKL параболоида чрезъ V, а площадь эллипса KL чрезъ S, имѣемъ:

$$V = 2\pi\sqrt{ab}\int_0^h hdh = \pi h^2\sqrt{ab} = S\cdot\frac{h}{2} =$$

= *объему цилиндра, имѣющаго основаніемъ эллипсъ KL, а высотою* $\frac{h}{2}$.

Поверхности тѣлъ вращенія.

420. *Величину поверхности*, описанной кривою AM (черт. n° 407), вращающеюся около оси OX, будемъ разсматривать, какъ *предѣлъ, къ которому стремится сумма коническихъ поверхностей, описанныхъ хордами ломаной линіи, вписанной въ дугѣ AM, когда каждая изъ этихъ хордъ подходитъ къ* 0. Обозначимъ этотъ предѣлъ чрезъ S, и, разсматривая его какъ функцію x, найдемъ производную послѣдней относительно x. Длина дуги AM пусть будетъ s (также функція x). Когда перемѣнной x дадимъ приращеніе Δx (NN'), дуга s получитъ приращеніе Δs, равное длинѣ дуги MM', т. е. предѣлу суммы хордъ ломанной, въ ней вписанной; а поверхность S получитъ приращеніе ΔS, равное поверхности, производимой дугою MM', т. е. предѣлу суммы коническихъ поверхностей, производимыхъ послѣдними хордами. Пусть Δx въ такой мѣрѣ мало, чтобы между M и M' ординаты точекъ дуги MM' шли въ одну сторону, другими словами — чтобы между этими точками не было ни наибольшихъ, ни наименьшихъ ординатъ; тогда и ординаты серединъ хордъ ломанной, вписанной въ эту дугу, будутъ слѣдовать тому же закону. Пусть ω_1, ω_2, ω_3,..., ω_n хорды послѣдней ломанной, а y_1, y_2, y_3,... ..., y_n ординаты серединъ этихъ хордъ; тогда сумма коническихъ поверхностей, описанныхъ хордами, будетъ:

$$2\pi(y_1\omega_1 + y_2\omega_2 + y_3\omega_3 + \ldots + y_n\omega_n).$$

Обозначимъ эту сумму чрезъ P. Такъ какъ:

$$y < y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_n < y + \Delta y \qquad \left(\text{если ординаты растутъ.}\right),$$

$$y > y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_n > y + \Delta y \qquad \left(\begin{matrix}\text{если ординаты}\\ \text{уменьшаются}\end{matrix}\right),$$

то

$$y_1 = y + \theta_1 \Delta y,\ y_2 = y + \theta_2 \Delta y, \dots,\ y_n = y + \theta_n \Delta y,$$

гдѣ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_n < 1;$$

слѣдовательно:

$$P = 2\pi y(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) + 2\pi \Delta y(\theta_1 \omega_1 + \theta_2 \omega_2 + \dots + \theta_n \omega_n).$$

Сумма: $\theta_1\omega_1 + \theta_2\omega_2 + \dots + \theta_n\omega_n$ менѣе суммы: $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$; по этому первую можно представить произведеніемъ второй на количество θ, большее 0, но меньшее 1-цы.

$$P = 2\pi y(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) + 2\pi \theta \Delta y(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n),$$

или короче:

$$P = 2\pi y \Sigma\omega + 2\pi\theta \Delta y \Sigma\omega = 2\pi(y + \theta\Delta y)\Sigma\omega.$$

Съ приближеніемъ каждой изъ хордъ: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ къ 0 (при чемъ число ихъ n растетъ безгранично), сумма $\Sigma\omega$ стремится къ Δs, а P къ ΔS; по этому, обозначая предѣлъ θ чрезъ θ_0, находимъ:

$$\Delta S = 2\pi(y + \theta_0 \Delta y)\Delta s,\ \frac{\Delta S}{\Delta x} = 2\pi(y + \theta_0 \Delta y)\frac{\Delta s}{\Delta x}.$$

Подводя Δx къ 0, и переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$S_x' = 2\pi y \cdot s_x';$$

слѣдовательно:

$$dS = 2\pi y ds, \quad S = 2\pi \int y ds.$$

Предѣлы интегрированія будутъ тѣ или другіе, смотря потому, въ какой перемѣнной выражаемъ подъинтегральную функцію: въ x, въ y, или вообще въ какой-нибудь t:

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx = 2\pi \int_{y_0}^{y} y\sqrt{1 + (x'_y)^2} \cdot dy =$$

$$= 2\pi \int_{t_0}^{t} y\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt.$$

Если вращать кривую около оси OY, то производимая ею поверхность будетъ: $2\pi \int xds$.

421. Поверхность продолговатаго эллипсоида вращенія.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0, \ dy = -\frac{b^2x}{a^2y}dx,$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx}{a^2y}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2},$$

$$yds = \frac{dx}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2} = \frac{bdx}{a}\sqrt{a^2 - e^2x^2} \quad \left(\begin{matrix}e \text{ эксцентриси-}\\ \text{тетъ эллипса}\end{matrix}\right).$$

Пусть S_1 *вся поверхность.*

$$S_1 = \frac{4\pi b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, dx,$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, dx = \left(x\sqrt{a^2 - e^2x^2}\right)_0^a - \int_0^a \frac{-e^2x^2}{\sqrt{a^2 - e^2x^2}}dx$$

$$= ab - \int_0^a \frac{a^2 - e^2x^2}{\sqrt{a^2 - e^2x^2}}dx + \int_0^a \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - e^2x^2}};$$

$$2\int_0^a \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, dx = ab + \frac{a^2}{e}\int_0^a \frac{d\,\frac{ex}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{ex}{a}\right)^2}} = ab + a^2 \cdot \frac{\text{arc}\sin e}{e},$$

$$S_1 = 2\pi b^2 + 2\pi ab\,\frac{\text{arc}\sin e}{e}.$$

Другой выводъ:

$$\left.\begin{matrix}x = a\sin\varphi\\ y = b\cos\varphi\end{matrix}\right\} ds = a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} \cdot d\varphi,\ yds = ab\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} \cdot \cos\varphi\, d\varphi;$$

$$S_1 = 4\pi ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} \cdot \cos\varphi\, d\varphi.$$

Положимъ: $e \sin \varphi = \sin \psi$; тогда:

$$S_1 = \frac{4\pi ab}{e} \int_0^{\arc \sin e} \cos^2 \psi \, d\psi = \frac{4\pi ab}{e} \left(\frac{\sin \psi \cos \psi + \psi}{2} \right)_0^{\arc \sin e} =$$

$$= \frac{4\pi ab}{e} \cdot \frac{e\sqrt{1 - e^2} + \arc \sin e}{2} = 2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arc \sin e}{e}.$$

422. **Поверхность сжатаго эллипсоида вращенія.**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; \frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0, \; dx = -\frac{a^2 y}{b^2 x} dy,$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{b^2 x} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2},$$

$$xds = \frac{dy}{b^2} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2} = \frac{ady}{b^2} \sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}.$$

Пусть S_{11} *вся поверхность.*

$$S_{11} = 4\pi \int_0^b xds = \frac{4\pi a}{b^2} \int_0^b \sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4} \cdot dy;$$

$$\int_0^b \sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}\, dy = \left(y \sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4} \right)_0^b - \int_0^b \frac{a^2 e^2 y^2 \, dy}{\sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}}$$

$$= ab^2 - \int_0^b \frac{a^2 e^2 y^2 + b^4}{\sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}} dy + \int_0^b \frac{b^4 \, dy}{\sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}};$$

$$2 \int_0^b \sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}\, dy = ab^2 + \frac{b^4}{ae} \int_0^b \frac{d\,(aey)}{\sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}} = ab^2 + \frac{b^4}{ae}\, l\, \frac{a(1+e)}{b};$$

$$S_{11} = 2\pi a^2 + 2\pi b^2 \frac{l\,\frac{a(1+e)}{b}}{e}.$$

423. *Отъ обращенія эллипса около малой его оси получается бо́льшая поверхность, нежели отъ обращенія его около большой оси.* Это можно видѣть изъ сравненія S_{11} съ S_1. Такъ какъ: $b^2 = a^2(1 - e^2)$, $b = a\sqrt{1 - e^2}$, то:

$$S_1 = 2\pi a^2 \left(1 - e^2 + \frac{\arc \sin e}{e} \sqrt{1 - e^2} \right),$$

$$S_{11} = 2\pi a^2\left(1 + \frac{1-e^2}{2e} l \frac{1+e}{1-e}\right);$$

но:

$$\frac{\arc\sin e}{e}\sqrt{1-e^2} < 1, \frac{1-e^2}{2e} l \frac{1+e}{1-e} > 1 - e^2;$$

по этому:

$$S_1 < 2\pi a^2(2-e^2) < S_{11}.$$

424. **Поверхность двуполаго гиперболоида вращенія.**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad dy = \frac{b^2 x}{a^2 y} dx,$$

$$ds = \frac{dx}{a^2 y}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2} = b\frac{\sqrt{e^2 x^2 - a^2}}{ay} dx \quad \left(\begin{matrix} e \text{ эксцентрицитетъ} \\ \text{гиперболы} \end{matrix}\right).$$

S_1 *поверхность, производимая дугою* AM *при вращеніи ея около* OX (a, n⁰ 409).

$$S_1 = 2\pi\int_a^x y ds = \frac{2\pi b}{a}\int_a^x \sqrt{e^2 x^2 - a^2}\, dx = \frac{\pi b x}{a}\sqrt{e^2 x^2 - a^2} -$$

$$- \pi b^2 - \frac{\pi a b}{e} l \frac{ex + \sqrt{e^2 x^2 - a^2}}{ea + b}.$$

425. **Поверхность однополаго гиперболоида вращенія.**

$$ds = \frac{dy}{b^2 x}\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2} = \frac{a\sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}}{b^2 x} dy.$$

S_{11} *поверхность, производимая дугою* AM *при вращеніи ея около* OY (b, n⁰ 409),

$$S_{11} = 2\pi\int_0^y x ds = \frac{2\pi a}{b^2}\int_0^y \sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}\, dy =$$

$$= \frac{\pi a y}{b^2}\sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4} + \frac{\pi b^2}{e} l \frac{aey + \sqrt{a^2 e^2 y^2 + b^4}}{b^2}.$$

426. **Пверхность параболоида вращенія.**

$$y^2 = 2px, \quad y dy = p dx, \quad ds = \frac{dx}{y}\sqrt{y^2 + p^2} = \frac{dx}{y}\sqrt{2px + p^2}.$$

S *поверхность, производимая дугою* OM *при вращеніи ея около* OX (n⁰ 410).

$$S=2\pi\int_0^x y ds=2\pi\int_0^x \sqrt{2px+p^2}dx=\frac{2\pi}{3}\left[(2x+p)\sqrt{2px+p^2}-p^2\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left[\frac{y^2+p^2}{p}\sqrt{y^2+p^2}-p^2\right].$$

427. Поверхность кольца, образуемаго вращеніемъ эллипса около прямой, параллельной одной изъ его осей. (n⁰ 411).

Эту поверхность (S) можно разсматривать состоящею изъ двухъ: поверхности S_1, описанной дугою AEB, и поверхности S_{11}, описанной дугою ADB; а эти послѣднія получимъ удваивая поверхности, производимыя дугами EB и DB. Длины дугъ EM' и DM'', отвѣчающихъ одной и той же абсциссѣ x, одинаковы; дифференціалы ихъ также равны; по этому, обозначая каждую изъ этихъ дугъ чрезъ s, а длину дуги EB, или, что все равно, DB, чрезъ s_1, находимъ:

$$S_1=4\pi\int_0^{s_1} y_1\, ds$$

(предѣлы интегрированій здѣсь относятся къ перемѣнной s)

$$S_{11}=4\pi\int_0^{s_1} y_{11} ds$$

$$S=S_1+S_{11}=4\pi\int_0^{s_1}(y_1+y_{11})ds=8\pi h\int_0^{s_1} ds=8\pi h s_1=4s_1\cdot 2\pi h=$$

$=$ *произведенію длины обвода производящаго эллипса на длину окружности, описанной центромъ эллипса.*

428. Поверхность, образуемая вращеніемъ циклоиды около ея основанія.

$$\left.\begin{aligned} x&=r(\varphi-\sin\varphi)\\ y&=r(1-\cos\varphi)\end{aligned}\right\}\quad ds=2r\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi;$$

$$S=2\pi\int_0^{2\pi} y ds=4\pi r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi=$$

$$=8\pi r^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$=16\pi r^2\int_0^{\pi}\sin^3\psi d\psi=32\pi r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\psi d\psi=\frac{64}{3}\pi r^2.$$

Интегралы съ безконечными предѣлами.

429. **Интегралы:**

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

будемъ разсматривать, какъ *предѣлы*, къ которымъ стремятся интегралы:

$$\int_a^{b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-a}^{+b} f(x)\,dx,$$

когда въ первомъ b, а во второмъ a и b, растутъ безгранично.

Предѣлы эти, смотря по свойству подъинтегральной функціи, могутъ зависѣть или не зависѣть отъ законовъ возрастанія b, или a и b. Въ первомъ случаѣ при произвольномъ законѣ возрастанія они неопредѣленны, во второмъ — могутъ быть вполнѣ опредѣленными числами, по какому бы закону ни возрастали b, или a и b. Если: $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$, и функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ сплошныя на пути x отъ a до ∞ для перваго интеграла, и отъ $-\infty$ до $+\infty$ для втораго, то:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \text{пред.} \int_a^{b} f(x)\,dx = \text{пред.} \left\{ \Big[\varphi(x)\Big]_a^b \right\} = \Big[\varphi(x)\Big]_a^{\infty},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \text{пред.} \int_{-a}^{+b} f(x)\,dx = \text{пред.} \left\{ \Big[\varphi(x)\Big]_{-a}^{+b} \right\} = \Big[\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Примѣры:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^{\infty} = 1.$

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)_1^{\infty} = \frac{1}{2}.$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)_1^{\infty} = 2.$

d) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} = \left[-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{n-1} \qquad (n > 1).$$

e) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \left(\operatorname{arc\,tg} x\right)_0^\infty = \frac{\pi}{2} = 1{,}570796\ldots.$$

f) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{a}}\right)_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \qquad (a > 0).$$

g) $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty = 1.$$

h) $$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)_0^\infty = \frac{1}{a} \qquad (a > 0).$$

i) $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int_0^\infty \left(\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{6}\, l\,\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

j) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \left(\operatorname{arc\,tg} x\right)_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

430. **Разложеніе интеграловъ** чрезъ разложеніе подъинтегральной функціи, а также **формула интегрированія по частямъ**, распространяются и на интегралы съ безконечными предѣлами. Это можно видѣть изъ слѣдующихъ формулъ:

$$\int_a^b [f(x) + f_1(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f_1(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,df_1(x) = \Big[f(x)\,f_1(x)\Big]_a^b - \int_a^b f_1(x)\,df(x),$$

въ которыхъ функціи f и f_1 предполагаются сплошными на протяженіи x отъ a до b. Допуская эту сплошность отъ a до b, какъ-бы ни

было велико b, и увеличивая b безгранично, при переходѣ къ предѣламъ получимъ:

$$\int_a^\infty [f(x) + f_1(x)]\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx + \int_a^\infty f_1(x)\,dx$$

$$\int_a^\infty f(x)\,df_1(x) - \Big[f(x)\,f_1(x)\Big]_a^\infty - \int_a^\infty f_1(x)\,df(x).$$

Подобное заключеніе сдѣлаемъ и для интеграловъ въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Разлагать интегралъ въ предѣлахъ a и ∞ на другіе интегралы, съ оставленіемъ той же подъинтегральной функціи, можно опираясь на формулу:

$$\int_a^p f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^p f(x)\,dx.$$

Увеличивая p и сравнивая потомъ предѣлы равныхъ перемѣнныхъ, получимъ:

$$\text{пред.} \int_a^p f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \text{пред.} \int_b^p f(x)\,dx,$$

или:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx.$$

Тоже относится и къ интегралу: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Замѣтимъ, что послѣдній интегралъ можно привесть къ интеграламъ съ однимъ безконечнымъ предѣломъ. Дѣйствительно: считая $f(x)$ сплошною функціею на всемъ пути x отъ $-a$ до $+b$, имѣемъ:

$$\int_{-a}^{+b} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx;$$

а отсюда:

$$\text{пред.} \int_{-a}^{+b} f(x)\,dx = \text{пред.} \int_0^a f(-x)\,dx + \text{пред.} \int_0^b f(x)\,dx.$$

Если послѣдніе два предѣла существуютъ, и при томъ не зависятъ первый отъ закона возрастанія a, второй отъ закона возрастанія b, то второй можно замѣнить предѣломъ интеграла $\int_0^a f(x)\,dx$, — и тогда:

$$\text{пред.}\int_{-a}^{+b} f(x)\,dx = \text{пред.}\int_0^a f(-x)\,dx + \text{пред.}\int_0^a f(x)\,dx =$$

$$= \text{пред.}\left[\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(-x)\,dx\right] = \text{пред.}\int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx.$$

Къ тому же приводится и пред. $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$.

Слѣдовательно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \text{пред.}\int_{-a}^{+b} f(x)\,dx = \text{пред.}\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx =$$

$$= \text{пред.}\int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx = \int_0^\infty [f(x)+f(-x)]\,dx.$$

Отсюда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^\infty f(x)\,dx \quad \left(\text{если } f(x) \text{ четная функція}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 \quad \left(\text{если } f(x) \text{ нечетная функція}\right);$$

если же $f(x)$ ни четная, ни нечетная функція, то, разбивая ее на двѣ: $\xi(x)$ и $\psi(x)$, изъ которыхъ первая четная, а вторая нечетная, получимъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 2\int_0^\infty \xi(x)\,dx.$$

Примѣръ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+1}{x^4+1}dx=2\int_0^\infty\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}l\,\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)\right]_0^\infty=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

431. **Интегралы:** $\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ и $\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$ $\left(\begin{matrix}n \text{ цѣлое полож.}\\ a \text{ полож.}\end{matrix}\right)$.

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}=\int_0^\infty\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx=\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}-\frac{1}{2}\int_0^\infty x\cdot\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^{n+1}}=$$

$$=\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}+\frac{1}{2n}\int_0^\infty xd\frac{1}{(x^2+1)^n}=\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}+\frac{1}{2n}\left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^\infty-\frac{1}{2n}\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n};$$

а такъ какъ: $\left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^\infty=0$, то:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}=\frac{2n-1}{2n}\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

Подставляя сюда вмѣсто n послѣдовательно: $n-1$, $n-2$,..., 3, 2, 1, получимъ:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

. . . .

. . . .

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{3}{4}\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};$$

а послѣ перемноженія и сокращенія:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\ 2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Замѣнимъ въ этомъ интегралѣ x^2 чрезъ $\frac{y^2}{a}$ (a положительное), откуда: $x=\frac{y}{\sqrt{a}}$, $dx=\frac{dy}{\sqrt{a}}$; тогда:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = a^n\sqrt{a}\int_0^\infty \frac{dy}{(y^2+a)^{n+1}} = a^n\sqrt{a}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2};$$

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2a^n\sqrt{a}} \quad \left(\begin{matrix}a \text{ полож. число,}\\ n \text{ полож. цѣлое}\end{matrix}\right).$$

432. **Интегралы:** $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ **и** $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx.$ $\left(\begin{matrix}n \text{ цѣлое полож.}\\ a \text{ полож.}\end{matrix}\right)$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = -\int_0^\infty x^n d(e^{-x}) = -\left(x^n e^{-x}\right)_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx;$$

но: $\left(x^n e^{-x}\right)_0^\infty = \left(\frac{x^n}{e^x}\right)_0^\infty = 0$; по этому:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = (n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}\,dx$$

. . . .

. . . .

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = 3\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty x e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1\,,$$

откуда:

$$\int_0^\infty x^n\,e^{-x}\,dx = 1.2.3.\ldots n.$$

Полагая здѣсь: $x = ay$ $(a > 0)$, откуда $dx = a dy$, получимъ:

$$\int_0^\infty x^n\,e^{-x}\,dx = a^{n+1}\int_0^\infty y^n\,e^{-ay}\,dy = 1.2.3\ldots n\,;$$

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty x^n\,e^{-ax}\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}} \qquad (a > 0).$$

433. Найдемъ интегралъ $\int_{\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1}$, въ которомъ m и n цѣлыя положительныя числа, и при томъ $m < n$.

Будемъ разсматривать этотъ интегралъ сначала какъ предѣлъ, къ которому стремится $\int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1}$, когда положительное число a растетъ безгранично.

Корни цѣлой функціи $x^{2n}+1$ всѣ мнимые, и попарно сопряженные; они найдутся изъ выраженія:

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\,,$$

когда въ немъ числу k будемъ приписывать значенія: $0, 1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, n-1$. Эти корни, стало-быть, будутъ:

$$\cos\frac{\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi}{2n}\,, \quad \cos\frac{\pi}{2n} - i\sin\frac{\pi}{2n}\,,$$

$$\cos\frac{3\pi}{2n} + i\sin\frac{3\pi}{2n}\,, \quad \cos\frac{3\pi}{2n} - i\sin\frac{3\pi}{2n}\,,$$

$$\cos\frac{5\pi}{2n}+i\sin\frac{5\pi}{2n},\quad \cos\frac{5\pi}{2n}-i\sin\frac{5\pi}{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n},\quad \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}-i\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Обозначимъ $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ чрезъ φ; для первой пары сопряженныхъ корней: $\varphi=\frac{\pi}{2n}$, для второй: $\varphi=\frac{3\pi}{2n}$, и т. д., и для послѣдней: $\varphi=\frac{(2n-1)\pi}{2n}$.

Разложимъ дробь $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$ на простѣйшія:

$$\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}=\sum\left[\frac{A}{x-\cos\varphi-i\sin\varphi}+\frac{B}{x-\cos\varphi+i\sin\varphi}\right].$$

Въ этой суммѣ n паръ дробей, и въ каждой парѣ A, B и φ имѣютъ свои значенія. По правилу n° 313 имѣемъ:

$$A=\left(\frac{x^{2m}}{2nx^{2n-1}}\right)_{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\frac{1}{2n}\left[\cos\varphi+i\sin\varphi\right]^{-(2n-(2m+1))}=$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\cos(2n-(2m+1))\varphi-i\sin(2n-(2m+1))\varphi\right]$$

$$=\frac{1}{2n}\left\{\cos\left[(2k+1)\pi-(2m+1)\varphi\right]-i\sin\left[(2k+1)\pi-(2m+1)\varphi\right]\right\}$$

$$=-\frac{1}{2n}\left[\cos(2m+1)\varphi+i\sin(2m+1)\varphi\right]$$

$$B=\left(\frac{x^{2m}}{2nx^{2n-1}}\right)_{\cos\varphi-i\sin\varphi}=-\frac{1}{2n}\left[\cos(2m+1)\varphi-i\sin(2m+1)\varphi\right].$$

Если обозначимъ $(2m+1)\varphi$ чрезъ ψ, то:

$$A=-\frac{1}{2n}(\cos\psi+i\sin\psi),\quad B=-\frac{1}{2n}(\cos\psi-i\sin\psi).$$

И такъ:

$$\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}=-\frac{1}{2n}\sum\left(\frac{\cos\psi+i\sin\psi}{x-\cos\varphi-i\sin\varphi}+\frac{\cos\psi-i\sin\psi}{x-\cos\varphi+i\sin\varphi}\right)$$

$$=-\frac{1}{n}\sum\frac{(x-\cos\varphi)\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi}{x^2-2x\cos\varphi+1}=-\frac{1}{n}\sum\frac{x\cos\psi-\cos(\psi-\varphi)}{x^2-2x\cos\varphi+1}$$

$$\int \frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = -\frac{1}{n}\sum\int \frac{x\cos\psi - \cos(\psi-\varphi)}{x^2-2x\cos\varphi+1}dx$$

$$= -\frac{1}{n}\sum\left[\frac{\cos\psi}{2}\,l\,(x^2-2x\cos\varphi+1) - \sin\psi \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right] + C$$

$$\int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} =$$

$$-\frac{1}{n}\sum\left[\frac{\cos\psi}{2}\,l\,\frac{a^2-2a\cos\varphi+1}{a^2+2a\cos\varphi+1} - \sin\psi\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a-\cos\varphi}{\sin\varphi} + \operatorname{arc\,tg}\frac{a+\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)\right].$$

Съ возрастаніемъ a дробь $\frac{a^2-2a\cos\varphi+1}{a^2+2a\cos\varphi+1}$ стремится къ 1, а логариѳмъ ея къ 0; дроби $\frac{a-\cos\varphi}{\sin\varphi}$ и $\frac{a+\cos\varphi}{\sin\varphi}$ растутъ безгранично, принимая положительныя значенія (такъ какъ $\sin\varphi > 0$), и стало-быть арктангенсъ каждой изъ этихъ дробей подходитъ къ $\frac{\pi}{2}$; по этому:

$$\text{пред.} \int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n}\sum\sin\psi = \frac{\pi}{n}\sum\sin(2k+1)\,\alpha,$$

гдѣ: $\alpha = \frac{(2m+1)\pi}{2n}$.

Сумму $\Sigma\sin(2k+1)\alpha$, въ которой n членовъ, упростимъ:

$$\Sigma\sin(2k+1)\alpha = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha,$$

$$\sin\alpha\,\Sigma\sin(2k+1)\alpha = \sin\alpha\sin\alpha + \sin 3\alpha\sin\alpha + \sin 5\alpha\sin\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \sin(2n-1)\alpha\sin\alpha$$

$$= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{2} + \frac{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{2} + \ldots + \frac{\cos(2n-2)\alpha - \cos 2n\alpha}{2}$$

$$= \frac{1-\cos 2n\alpha}{2} = \frac{1-\cos(2m+1)\pi}{2} = 1;$$

слѣдовательно:

$$\sum\sin(2k+1)\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

И такъ:

$$\text{пред.} \int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

Подъинтегральная функція $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$ четная; по этому:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}=2\int_0^a\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1},\ \int_0^a\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}=\frac{1}{2}\int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1},$$

$$\text{пред.}\int_0^a\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}=\frac{1}{2}\ \text{пред.}\int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}=\frac{\pi}{2n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

Отсюда видимъ между прочимъ, что законъ возрастанія a не имѣетъ вліянія на предѣлы интеграловъ:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}\ \text{и}\ \int_0^a\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1};$$

а по этому съ предѣломъ перваго изъ этихъ интеграловъ одинаковъ и предѣлъ интеграла

$$\int_{-a}^{+b}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1},$$

когда a и b растутъ безгранично по какому угодно закону, — что подтверждается и слѣдующимъ разложеніемъ:

$$\int_{-a}^{+b}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}=\int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}+\int_a^b\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}=\int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}+\int_0^b\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}-\int_0^a\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1};$$

такъ какъ предѣлы двухъ послѣднихъ интеграловъ одинаковы, по причинѣ независимости ихъ отъ законовъ возрастанія въ одномъ a, въ другомъ b, то:

$$\text{пред.}\int_{-a}^{+b}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}=\text{пред.}\int_{-a}^{+a}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}.$$

И такъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}=\frac{\pi}{n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}},$$

$$(m<n)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}=\frac{\pi}{2n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

434. **Интегралы:** $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$ и $\int_0^\infty \frac{x^{-a}\,dx}{1+x}$ $\left(a \begin{matrix} >0 \\ <1 \end{matrix}\right)$.

Въ послѣднемъ интегралѣ n⁰ 433 положимъ: $x^{2n}=y$; тогда:

$$x=y^{\frac{1}{2n}},\quad x^{2m}\,dx=\frac{1}{2n}y^{\frac{2m+1}{2n}-1}\,dy,$$

а предѣлы интегрированія относительно y будутъ тѣже: 0 и ∞; по этому:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1}=\frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{2m+1}{2n}-1}\,dy}{1+y}=\frac{\pi}{2n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

Слѣдовательно, обозначая $\frac{2m+1}{2n}$ чрезъ a, имѣемъ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (A)$$

Здѣсь a представляетъ дробь, въ которой числитель нечетное число, а знаменатель четное, и при томъ числитель менѣе знаменателя; но не трудно доказать, что формула (A) вѣрна при всякомъ значеніи a, заключающемся между 0 и 1. Для этого замѣнимъ m и n произведеніями mk и nk, считая и k цѣлымъ числомъ, а m по прежнему менѣе n, стало-быть и mk менѣе nk; тогда:

$$a=\frac{2mk+1}{2nk}=\frac{m}{n}+\frac{1}{2nk}.$$

Не измѣняя m и n, будемъ увеличивать k; тогда a, измѣняясь, будетъ подходить къ своему предѣлу $\frac{m}{n}$. Вмѣстѣ съ a будутъ измѣняться $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$ и $\frac{\pi}{\sin a\pi}$, оставаясь равными между собою. Сравнивая ихъ предѣлы, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}. \qquad (B)$$

Тутъ уже числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ произвольныя цѣлыя числа, только съ однимъ условіемъ: $m<n$.

Въ формулѣ (A) параметръ a можетъ быть и несоизмѣримымъ числомъ (между 0 и 1). Дѣйствительно: всякое несоизмѣримое число a (между 0 и 1) можно разсматривать какъ предѣлъ соизмѣримой перемѣнной дроби $\frac{m}{n}$ (въ которой $m<n$); по этому, измѣняя $\frac{m}{n}$, подводя къ предѣлу a, и сравнивая предѣлы частей (B), получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad \text{(интегралъ Эйлера).}$$

Изъ этого интеграла можно получить другой, подставляя въ немъ $1-a$ вмѣсто a, что возможно, потому что $1-a$ также заключается между 0 и 1; тогда будетъ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin(1-a)\pi}=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad \left(\begin{matrix}a>0\\ <1\end{matrix}\right).$$

Слѣдовательно:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}\,dx}{1+x}=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}.$$

Этотъ результатъ можно получить иначе. Положимъ $x=\frac{1}{y}$; тогда:

$$dx=-\frac{dy}{y^2},\quad x^{a-1}=\frac{1}{y^{a-1}}=y^{1-a},\quad \frac{1}{1+x}=\frac{y}{1+y},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=-\int_\infty^0 \frac{y^{-a}\,dy}{1+y}=\int_0^\infty \frac{x^{-a}\,dx}{1+x}.$$

435. Интегралы: $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n+1}$ и $\int_0^\infty \frac{x^{n-m-1}\,dx}{x^n+1}\,(m<n)$.

Въ формулѣ (B) n⁰ 434 положимъ: $x^{\frac{1}{n}}=y$; тогда:

$$x=y^n,\quad x^{\frac{m}{n}}=y^m,\quad x^{\frac{m}{n}-1}\,dx=ny^{m-1}\,dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{n}-1}dx}{1+x} = n\int_0^\infty \frac{y^{m-1}dy}{y^n+1} = \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}};$$

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x^n+1} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} \qquad \text{(интегралъ Эйлера).}$$

Здѣсь m и n произвольныя числа, удовлетворяющія условію: $m<n$; по этому вмѣсто m можно подставить и разность $n-m$, которая также менѣе n; тогда:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-m-1}dx}{x^n+1} = \frac{\pi}{n\sin\frac{(n-m)\pi}{n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}};$$

стало-быть:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-m-1}dx}{x^n+1} = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x^n+1}.$$

Къ этому же заключенію пришли-бы преобразованіемъ интеграла въ другой, связывая x съ y уравненіемъ: $x=\frac{1}{y}$.

Подставляя въ найденныя формулы вмѣсто m и n послѣдовательно: 1 и 3, 2 и 3, 1 и 4, 2 и 4, 3 и 4, и т. д., получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^\infty \frac{xdx}{x^3+1} = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}, \text{ и т. д.}$$

436. Интегралы: $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ **и** $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a>0)$.

Въ этихъ интегралахъ функціи: $e^{-ax}\cos bx$ и $e^{-ax}\sin bx$ при

$x=\infty$ не представляютъ неопредѣленности, не смотря на то, что при этомъ множители $\cos bx$ и $\sin bx$ неопредѣленны. Дѣйствительно: при безграничномъ возрастаніи x, такъ какъ $a>0$, множитель e^{-ax} стремится къ 0, а $\cos bx$ и $\sin bx$ не выходятъ изъ границъ -1 и $+1$; по этому предѣлы функцій $e^{-ax}\cos bx$ и $e^{-ax}\sin bx$, когда x растетъ безгранично, вполнѣ опредѣленные; предѣлы эти — нули.

Обозначимъ первый интегралъ чрезъ p, второй чрезъ q.

Интегрированіе по частямъ доставитъ:

$$p=-\int_0^\infty \cos bx\, d\frac{e^{-ax}}{a}=\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\cos bx\right)_0^\infty-\frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\, dx,$$

$$q=-\int_0^\infty \sin bx\, d\frac{e^{-ax}}{a}=\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\sin bx\right)_0^\infty+\frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\, dx;$$

а такъ какъ:

$$\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\cos bx\right)_0^\infty=\frac{1}{a},\ \left(-\frac{e^{-ax}}{a}\sin bx\right)_0^\infty=0,$$

то:

$$p=\frac{1}{a}-\frac{b}{a}q,\ q=\frac{b}{a}p,$$

откуда:

$$p=\frac{a}{a^2+b^2},\ q=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

И такъ:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\, dx=\frac{a}{a^2+b^2},\ \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\, dx=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

437. Замѣненіемъ перемѣнной интегралы съ безконечными предѣлами можно приводить къ интеграламъ въ предѣлахъ конечныхъ. Положимъ: $\frac{1}{x}=y$; тогда: $x=\frac{1}{y}$, $dx=-\frac{dy}{y^2}$; слѣдовательно:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx=-\int_{\frac{1}{a}}^0 f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2}=\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx.$$

Если нижній предѣлъ интеграла есть 0, то можно предварительно

разложить интегралъ на два: одинъ въ предѣлахъ 0 и a, другой въ предѣлахъ a и ∞, и послѣдній преобразовать въ интегралъ съ конечными предѣлами:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx.$$

Преобразуемъ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ положеніемъ: $e^{-x} = z$.

$$x = -lz = l\frac{1}{z},\ \ dx = -\frac{dz}{z},$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = -\int_{e^{-a}}^0 \frac{f\left(l\frac{1}{z}\right)}{z}\,dz = \int_0^{e^{-a}} \frac{f\left(l\frac{1}{z}\right)}{z}\,dz,$$

или

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^{e^{-a}} \frac{f\left(l\frac{1}{x}\right)}{x}\,dx = \int_0^{e^{-a}} \frac{f(-lx)}{x}\,dx.$$

Примѣры:

a) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \int_0^1 y\,dy = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

b) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

c) $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^3+1} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+1} + \int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^3+1};$$

$$\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^3+1} = -\int_1^0 \frac{dy}{y^3+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1};$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^3+1} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^1 \frac{x+1}{x^3+1}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

d) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} + \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

e) $$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(e^{-x^2} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)dx.$$

f) $$\int_1^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{(lx)^2\sqrt{1+(lx)^2}}.$$

Интегралы разрывныхъ функцій.

438. Составимъ понятіе о такихъ интегралахъ, въ которыхъ подъинтегральная функція разрывается, обращаясь въ безконечность, для предѣловъ или между предѣлами интегрированія.

Пусть $b > a$, и на всемъ пути x отъ $x > a$ до $x = b$ функція $f(x)$ остается сплошною, а при $x = a$ обращается въ ∞. Подъ *интеграломъ* $\int_a^b f(x)\,dx$ будемъ разумѣть *предѣлъ, къ которому стремится интегралъ* $\int_{a+\omega}^b f(x)\,dx$, *когда въ немъ положительное* ω *подходитъ къ* 0.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{пред.} \int_{a+\omega}^b f(x)\,dx.$$

Если же $f(b) = \infty$ и функція $f(x)$ сплошная на всемъ пути x отъ a до $x < b$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{пред.} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

когда положительное ε стремится къ 0.

Наконецъ когда и $f(a) = \infty$, и $f(b) = \infty$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{пред.} \int_{a+\omega}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Пусть теперь функція $f(x)$ обращается въ ∞ на пути x между a и b, а именно при $x = \alpha$; тогда *интеграломъ* $\int_a^b f(x)\,dx$ назовемъ *предѣлъ, къ которому стремится сумма:*

$$\int_a^{\alpha-\omega} f(x)\,dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

когда положительныя количества ω *и* ε *подходятъ каждое къ* 0.

Этотъ предѣлъ, вообще говоря, зависитъ отъ закона, по которому ω и ε стремятся къ 0, и стало быть представляетъ величину неопредѣленную; но въ частныхъ случаяхъ можетъ быть единственнымъ и вполнѣ опредѣленнымъ, по какому-бы закону ω и ε ни подходили къ 0. Въ случаѣ неопредѣленности, значеніе предѣла послѣдней суммы, соотвѣтствующее $\omega = \varepsilon$, называютъ *главнымъ значеніемъ интеграла*. Это главное значеніе стало быть есть предѣлъ суммы:

$$\int_a^{\alpha-\omega} f(x)\,dx + \int_{\alpha+\omega}^b f(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ обращается въ ∞ два раза между a и b, а именно при $x = \alpha$ и при $x = \beta$, то, предполагая: $a < \alpha < \beta < b$, подъ *интеграломъ* $\int_a^b f(x)\,dx$ будемъ разумѣть *предѣлъ суммы:*

$$\int_a^{\alpha-\omega} f(x)\,dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\omega_1} f(x)\,dx + \int_{\beta+\varepsilon_1}^b f(x)\,dx,$$

когда положительныя ω, ε, ω_1 и ε_1 *стремятся къ 0.*

Подобное же опредѣленіе дадимъ интегралу и въ случаяхъ трехъ, четырехъ и т. д., разрывовъ подъинтегральной функціи.

Въ поясненіе приведемъ примѣры:

Первый примѣръ: $\int_0^a \frac{dx}{x^k} \qquad \begin{pmatrix} a > 0 \\ k > 0 \end{pmatrix}.$

$$\left(\frac{1}{x^k}\right)_0 = \infty, \quad \int_0^a \frac{dx}{x^k} = \text{пред.} \int_\omega^a \frac{dx}{x^k};$$

$$\int_\omega^a \frac{dx}{x^k} = -\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right)_\omega^a = \frac{a^{1-k} - \omega^{1-k}}{1-k};$$

$$\text{пред.} \int_\omega^a \frac{dx}{x^k} = \frac{a^{1-k}}{1-k}, \text{ при } k < 1,$$

$$\text{пред.} \int_\omega^a \frac{dx}{x^k} = \infty, \text{ при } k > 1,$$

$$\text{пред.} \int_\omega^a \frac{dx}{x^k} = \text{пред.} \int_\omega^a \frac{dx}{x} = \text{пр. } l\frac{a}{\omega} = \infty, \text{ при } k = 1.$$

И такъ: $\int_0^a \frac{dx}{x^k} = \frac{a^{1-k}}{1-k}, \text{ при } k < 1,$

$$= \infty, \text{ при } k \geqq 1.$$

Второй примѣръ: $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x^k} \qquad \begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \\ k > 0 \end{pmatrix}.$

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x^k} = \text{пред.} \left[\int_{-a}^{-\omega} \frac{dx}{x^k} + \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^k}\right];$$

$$\int_{-a}^{-\omega} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{(-1)^k} \int_\omega^a \frac{dx}{x^k}.$$

Чтобы интегралъ $\int_{-a}^{-\omega} \frac{dx}{x^k}$ былъ вещественнымъ, необходимо числу k быть или цѣлымъ, или дробнымъ съ знаменателемъ—числомъ нечетнымъ. Если k цѣлое четное число, либо дробное формы $\frac{2m}{2n+1}$, то:

$\frac{1}{(-1)^k}=1$; если же k нечетное число, либо дробное формы $\frac{2m+1}{2n+1}$, то: $\frac{1}{(-1)^k}=-1$ *). Обозначимъ для краткости $\frac{1}{(-1)^k}$ черезъ θ, такъ что:

$$\theta=1, \text{ при } k=\frac{2m}{2n+1}; \quad \theta=-1, \text{ при } k=\frac{2m+1}{2n+1}.$$

И такъ, считая k числомъ, подходящимъ подъ одну изъ двухъ послѣднихъ формъ, имѣемъ:

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x^k}=\text{пред.}\left[\int_\varepsilon^b\frac{dx}{x^k}+\theta\int_\omega^a\frac{dx}{x^k}\right]=\text{пр.}\frac{b^{1-k}-\varepsilon^{1-k}+\theta(a^{1-k}-\omega^{1-k})}{1-k}$$

$$=\frac{b^{1-k}+\theta a^{1-k}}{1-k}+\frac{\text{пред.}(\varepsilon^{1-k}+\theta\omega^{1-k})}{k-1}.$$

Если $k<1$, то: пред. $(\varepsilon^{1-k}+\theta\omega^{1-k})=0$, и тогда:

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x^k}=\frac{b^{1-k}+\theta a^{1-k}}{1-k};$$

Стало-быть при $k<1$ послѣдній интегралъ приводится къ дроби: $\frac{b^{1-k}+a^{1-k}}{1-k}$, если $k=\frac{2m}{2n+1}$, и къ дроби: $\frac{b^{1-k}-a^{1-k}}{1-k}$, если $k=\frac{2m+1}{2n+1}$.

Пусть теперь: $k=\frac{2m}{2n+1}>1$; тогда:

$$\frac{\text{пред.}(\varepsilon^{1-k}+\theta\omega^{1-k})}{k-1}=\frac{\text{пред.}(\varepsilon^{1-k}+\omega^{1-k})}{k-1}=\infty;$$

по этому:
$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x^k}=\infty.$$

Если же $k=\frac{2m+1}{2n+1}>1$, то двучленъ $\varepsilon^{1-k}+\theta\omega^{1-k}$ приведется къ разности $\varepsilon^{1-k}-\omega^{1-k}$, члены которой растутъ безгранично, — и по этому предѣлъ разности остается неопредѣленнымъ; онъ можетъ

---

*) Въ выраженіяхъ $\frac{2m}{2n+1}$ и $\frac{2m+1}{2n+1}$ заключаются и цѣлыя числа: въ первомъ четныя, во второмъ нечетныя.

принять то или другое значеніе, смотря по тому или другому закону приближенія ω и ε къ 0. Главное же значеніе интеграла $\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x^k}$ въ послѣднемъ случаѣ будетъ: $\frac{b^{1-k}-a^{1-k}}{1-k}$.

Наконецъ въ случаѣ: $k=1$ имѣемъ:

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}=\text{пред.}\left[\int_{-a}^{-\omega}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x}\right]=\text{пред.}\left[\int_{\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x}-\int_{\omega}^{a}\frac{dx}{x}\right]=$$

$$=\text{пред.}\,(lb-l\varepsilon-la+l\omega)=l\frac{b}{a}+\text{пред.}\ l\frac{\omega}{\varepsilon}.$$

Предѣлъ $l\frac{\omega}{\varepsilon}$ величина неопредѣленная; по этому и интегралъ $\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}$ число неопредѣленное. Главное же значеніе этого интеграла есть $l\frac{b}{a}$.

Дифференцированіе интеграловъ.

439. Въ функціи $f(x,\alpha)$ пусть α измѣняется независимо отъ x. Будемъ это α называть *перемѣннымъ параметромъ*. Интегралъ:

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,dx,$$

независящій, конечно, отъ x, есть функція параметра α и предѣловъ интегрированія a и b. Мы можемъ дифференцировать его по α, по a и по b. Если α, a и b независимы, то при дифференцированіи его по α, слѣдуетъ a и b считать постоянными; при дифференцированіи по a, постоянными будутъ α и b, а при дифференцированіи по b, — α и a. Предполагая функцію $f(x,\alpha)$ сплошною на пути x отъ a до b, и самый интегралъ сплошнымъ по отношенію къ α, a и b, станемъ дифференцировать интегралъ по каждой изъ перемѣнныхъ α, a и b. Пусть:

$$\int f(x,\alpha)\,dx=\varphi(x,\alpha)+C,\ \text{т. е.:}\ \varphi'_x(x,\alpha)=f(x,\alpha);$$

тогда:

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \varphi(b, \alpha) - \varphi(a, \alpha).$$

Дифференцируя это равенство по b и по a, получимъ:

$$\left[\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right]_b' = \varphi_b'(b, \alpha) = f(b, \alpha)$$

$$\left[\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right]_a' = -\varphi_a'(a, \alpha) = -f(a, \alpha).$$

Отсюда видимъ, что *производная интеграла* $\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ *относительно верхняго его предѣла равна значенію подъинтегральной функціи для верхняго предѣла, а производная его относительно нижняго предѣла равна значенію подъинтегральной функціи для нижняго предѣла, взятому съ обратнымъ знакомъ.*

440. Теперь найдемъ производную интеграла $\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ относительно α, предполагая предѣлы a и b независимыми отъ α. Дадимъ α приращеніе $\Delta\alpha$; предѣлы интеграла, какъ независящіе отъ α, не измѣнятся; по этому приращеніе интеграла выразится разностью:

$$\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

а отношеніе приращенія интеграла къ приращенію α:

$$\frac{\Delta \int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{\Delta\alpha} = \frac{\int_a^b f(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, dx.$$

Разность: $\frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} - f'_\alpha(x, \alpha)$ стремится къ 0 вмѣстѣ съ $\Delta\alpha$; обозначимъ ее чрезъ ω; тогда:

$$\frac{\Delta \int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{\Delta\alpha} = \int_a^b \left[f'_\alpha(x, \alpha) \pm \omega\right] dx = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + \int_a^b \omega\, dx.$$

Но: $\int_a^b \omega\, dx = (b-a)\,\omega_1$, гдѣ ω_1 есть значеніе ω, соотвѣтствующее одному изъ среднихъ значеній x между a и b; кромѣ того, ω стремится къ 0 вмѣстѣ съ $\Delta\alpha$ при всякомъ x между a и b, стало-быть и при среднемъ; и потому:

$$\text{пред.} \int_a^b \omega\, dx = (b-a)\,\text{пред.}\ \omega_1 = 0.$$

Слѣдовательно:

$$\left[\int_a^b f(x,\alpha)\, dx\right]'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\, dx,$$

т. е. *производная интеграла равна интегралу въ тѣхъ же предѣлахъ отъ производной подъинтегральной функціи.*

Стало-быть, продифференцовать интегралъ по параметру, отъ котораго предѣлы интегрированія не зависятъ, можно выполняя *дифференцированіе подъ знакомъ интеграла.*

Распространимъ эту теорему на случай, когда одинъ изъ предѣловъ интеграла, или оба, безконечные.

Обозначимъ чрезъ ε разницу между интеграломъ $\int_a^p f(x,\alpha)\, dx$ и его предѣломъ, когда p растетъ безгранично; тогда:

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)\, dx + \varepsilon = \int_a^p f(x,\alpha)\, dx,$$

$$\left[\int_a^\infty f(x,\alpha)\, dx\right]'_\alpha + \varepsilon'_\alpha = \left[\int_a^p f(x,\alpha)\, dx\right]'_\alpha = \int_a^p f'_\alpha(x,\alpha)\, dx.$$

Съ возрастаніемъ p, количество ε, а стало-быть и ε'_α, стремится къ 0; по этому, переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$\left[\int_a^\infty f(x,\alpha)\, dx\right]'_\alpha = \int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\, dx. \quad \left(\begin{array}{c}\text{Функціи } f(x,\alpha) \text{ и } f'_\alpha(x,\alpha) \\ \text{предполагаются сплошными}\end{array}\right).$$

Также докажется, что:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx\right]'_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\, dx.$$

441. Правило дифференцированія подъ знакомъ интеграла даетъ средство находить многіе опредѣленные интегралы простымъ дифференцированіемъ.

Дифференцируя n разъ:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \alpha^{-1}\ (\alpha > 0)\ (h, \text{n}^\circ\, 429)$$

по α, вводя при этомъ всякій разъ множителемъ -1, получимъ:

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x}\,dx = 1\,.\,\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2},$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x}\,dx = 1.2.\alpha^{-3} = \frac{1.2}{\alpha^3},$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x}\,dx = 1.2.3.\alpha^{-4} = \frac{1.2.3}{\alpha^4},$$

. . . .

. . . .

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{\alpha^{n+1}}.$$ (другой выводъ въ n° 432).

Поступая также съ равенствомъ:

$$\int_0^\infty (x^2+\alpha)^{-1}\,dx = \frac{\pi}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}\quad (\alpha > 0)\quad (f, \text{n}^\circ\, 429)$$

получимъ:

$$\int_0^\infty 1.(x^2+\alpha)^{-2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\alpha^{-\frac{3}{2}},$$

$$\int_0^\infty 1.2\,(x^3+\alpha)^{-3}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\alpha^{-\frac{5}{2}},$$

. . . .

. . . .

$$\int_0^\infty 1.2.3\ldots n\,(x^2+\alpha)^{-(n+1)}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\,\alpha^{-\frac{2n+1}{2}};$$

а отсюда:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2\alpha^n\sqrt{\alpha}} \qquad \left(\begin{matrix}\text{было въ}\\ \text{n}^0\ 431\end{matrix}\right).$$

442. Дифференцируя n разъ по α равенство:

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1} \qquad (\alpha > -1),$$

получимъ:

$$\int_0^1 x^\alpha\,lx\,dx = -\frac{1}{(\alpha+1)^2},$$

$$\int_0^1 x^\alpha\,(lx)^3\,dx = \frac{1.2}{(\alpha+1)^3},$$

$$\int_0^1 x^\alpha\,(lx)^3\,dx = -\frac{1.2.3}{(\alpha+1)^4},$$

. . . .

. . . .

$$\int_0^1 x^\alpha\,(lx)^n\,dx = (-1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots n}{(\alpha+1)^{n+1}}.$$

Отсюда, дѣлая $\alpha = 0$:

$$\int_0^1 (lx)^n\,dx = (-1)^n.1.2.3\ldots n.$$

Этотъ результатъ можно получить иначе: полагая $lx = -z$ (откуда: $x = e^{-z}$, $dx = -e^{-z}\,dz$), находимъ:

$$\int_0^1 (lx)^n\,dx = (-1)^{n+1}\int_\infty^0 z^n e^{-z}\,dz =$$

$$=(-1)^n\int_0^\infty z^n e^{-z}\,dz=(-1)^n\,1.2.3\ldots n.\quad (\text{n}^0\ 432).$$

Давая n значенія 1, 2, 3..., получимъ:

$$\int_0^1 lx\,dx=-1,\quad \int_0^1 (lx)^2\,dx=2,\quad \int_0^1 (lx)^3\,dx=-6,\cdots$$

Эти интегралы — опредѣленныя числа, не смотря на то, что lx при $x=0$ обращается въ $-\infty$. Ихъ можно разсматривать, какъ предѣлы интеграловъ отъ ω до 1, когда положительное ω стремится къ 0.

$$\int_0^1 (lx)^n\,dx=\text{пред.}\int_\omega^1 (lx)^n\,dx.$$

Для повѣрки найдемъ $\int_0^1 lx\,dx$, какъ предѣлъ интеграла: $\int_\omega^1 lx\,dx$:

$$\int_\omega^1 lx\,dx=(xlx-x)_\omega^1=-1\ -\omega l\omega+\omega,$$

$$\int_0^1 lx\,dx=\text{пред.}\int_\omega^1 lx\,dx=\text{пред.}\,(-1-\omega l\omega+\omega)=-1.$$

443. Въ формулѣ: $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi}\qquad \begin{pmatrix}a>0\\ <1\end{pmatrix}$

положимъ: $x=\frac{y}{\alpha}$ $(\alpha>0)$; тогда: $dx=\frac{dy}{\alpha}$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{1}{\alpha^{a-1}}\int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{y+\alpha}=\frac{\pi}{\sin a\pi};$$

а отсюда:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+\alpha}=\alpha^{a-1}\frac{\pi}{\sin a\pi}\qquad \begin{pmatrix}a>0\\ <1\\ \alpha>0\end{pmatrix}.$$

Дифференцируя послѣднее равенство n разъ по α, вводя при этомъ всякій разъ множитель -1, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(x+\alpha)^2}=(1-a)\,\alpha^{a-2}\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$1.2\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(x+\alpha)^3} = (1-a)(2-a)\,\alpha^{a-3}\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$1.2.3\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(x+\alpha)^4} = (1-a)(2-a)(3-a)\,\alpha^{a-4}\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

. . . .

. . . .

$$1.2.3\ldots n\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(x+\alpha)^{n+1}} = (1-a)(2-a)(3-a)\ldots(n-a)\,\alpha^{a-n-1}\,\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

откуда:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(x+\alpha)^{n+1}} = \frac{(1-a)(2-a)(3-a)\ldots(n-a)}{1.2.3\ldots\ldots n}\cdot\frac{\pi}{\alpha^{n+1-a}\sin a\pi}$$

$$\left(n \text{ цѣл. полож. число}, \ \alpha>0,\ a \begin{matrix} >0 \\ <1 \end{matrix}\right)$$

444. Чтобы продифференцировать по α неопредѣленный интегралъ $\int f(x,\alpha)\,dx$, представимъ его суммою:

$$\int_a^x f(z,\alpha)\,dz + C \quad (\text{n}^0\ 365) \qquad \left(\begin{matrix} C \text{ произвольная} \\ \text{функція } \alpha \end{matrix}\right),$$

къ которой и примѣнимъ правило дифференцированія подъ знакомъ интеграла; получимъ:

$$\left[\int f(x,\alpha)\,dx\right]'_\alpha = \int_a^x f'_\alpha(z,\alpha)\,dz + C'_\alpha.$$

Вторая часть этого равенства, въ которой C'_α произвольная функція α, представляетъ неопредѣленный интегралъ $\int f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$; и потому:

$$\left[\int f(x,\alpha)\,dx\right]'_\alpha = \int f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

Стало-быть правило дифференцированія подъ знакомъ интеграла примѣняется и къ неопредѣленнымъ интеграламъ.

Дифференцируя по этому правилу извѣстные неопредѣленны

интегралы, можемъ находить новые. Такъ дифференцированіе по α интеграловъ:

$$\int \cos\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha x}{\alpha} + C,\quad \int \sin\alpha x\,dx = -\frac{\cos\alpha x}{\alpha} + C,$$

приведетъ къ интеграламъ:

$$\int x\sin\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha x - \alpha x\cos\alpha x}{\alpha^2} + C,$$

$$\int x\cos\alpha x\,dx = \frac{\cos\alpha x + \alpha x\sin\alpha x}{\alpha^2} + C.$$

445. Мы дифференцировали интегралъ $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ по α, предполагая предѣлы интегрированія a и b независящими отъ α. Пусть теперь a и b функціи α, и требуется найти производную интеграла относительно α. Обозначимъ интегралъ буквою u. Онъ—функція трехъ количествъ a, b и α, изъ которыхъ первыя два по отношенію къ α сложныя числа. Дифференцируя его, получимъ:

$$(u_\alpha') = u_\alpha' + u_b'\cdot b_\alpha' + u_a'\cdot a_\alpha'.$$

Здѣсь (u_α') выражаетъ полную производную u по α, u_α' производную u по α, считая a и b постоянными, u_b' производную u по b, считая α и a постоянными, и наконецъ u_a' производную u по a, считая α и b постоянными. Опираясь на n°n° 439 и 440, имѣемъ:

$$u_\alpha' = \int_a^b f_\alpha'(x,\alpha)\,dx,\quad u_b' = f(b,\alpha),\quad u_a' = -f(a,\alpha);$$

слѣдовательно:

$$\left[\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right]_\alpha' = \int_a^b f_\alpha'(x,\alpha)\,dx + b_\alpha' f(b,\alpha) - a_\alpha' f(a,\alpha),$$

т. е. *производная интеграла равна интегралу въ тѣхъ же предѣлахъ отъ производной подъинтегральной функціи, сложенному съ произведеніемъ производной верхняго предѣла на значеніе подъинтегральной функціи для верхняго предѣла, безъ произведенія производной нижняго предѣла на значеніе подъинтегральной функціи для нижняго предѣла.*

Къ этому же результату придемъ, составляя отношеніе приращенія интеграла къ приращенію α, и переходя потомъ къ предѣлу отношенія.

$$\frac{\Delta \int_a^b f(x,\alpha)\,dx}{\Delta\alpha} = \frac{\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha)\,dx}{\Delta\alpha}$$

$$= \frac{\int_{a+\Delta a}^{a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_b^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha)\,dx}{\Delta\alpha}$$

$$= \int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx + \frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx}{\Delta\alpha} - \frac{\int_a^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx}{\Delta\alpha}$$

$$= \int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx + \frac{\Delta b}{\Delta\alpha} f(b_1,\alpha+\Delta\alpha) - \frac{\Delta a}{\Delta\alpha} f(a_1,\alpha+\Delta\alpha).$$

Здѣсь b_1 средняя величина между b и $b+\Delta b$, a_1 средняя между a и $a+\Delta a$. Эти среднія, съ приближеніемъ $\Delta\alpha$ къ 0, стремятся первая къ b, вторая къ a. Отношенія $\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}$ и $\frac{\Delta a}{\Delta\alpha}$ стремятся первое къ b_α', второе къ a_α'. По этому, сравнивая предѣлы равныхъ перемѣнныхъ, находимъ:

$$\left[\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right]_\alpha' = \int_a^b f_\alpha'(x,\alpha)\,dx + b_\alpha' f(b,\alpha) - a_\alpha' f(a,\alpha).$$

Если a постоянное, а $b=\alpha$, то: $a_\alpha' = 0$, $b_\alpha' = 1$; тогда:

$$\left[\int_a^\alpha f(x,\alpha)\,dx\right]_\alpha' = \int_a^\alpha f_\alpha'(x,\alpha)\,dx + f(\alpha,\alpha).$$

Примѣръ:

$$\left[\int_0^\alpha \frac{dx}{x^2+\alpha^2}\right]_\alpha' = \int_0^\alpha \left(\frac{1}{x^2+\alpha^2}\right)_\alpha' dx + \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Повѣрка:

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{d\,\frac{x}{\alpha}}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\alpha}\right)_0^\alpha = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4\alpha},$$

$$\left[\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}\right]'_a = \left(\frac{\pi}{4a}\right)'_a = -\frac{\pi}{4a^2};$$

$$\int_0^a \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)'_a dx = -\int_0^a \frac{2a\,dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{\pi}{4a^2} - \frac{1}{2a^2},$$

$$\int_0^a \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)'_a dx + \frac{1}{2a^2} = -\frac{\pi}{4a^2}.$$

Кратное интегрированіе.

446. Функція, по данной производной ея высшаго порядка, найдется послѣдовательнымъ интегрированіемъ. Такъ, если: $y'''=f(x)$, то:

$$y'' = \int f(x)\,dx,\ y' = \int\left[dx\int f(x)\,dx\right],$$

$$y = \int\left\{dx\int\left[dx\int f(x)\,dx\right]\right\}.$$

Два послѣднихъ интеграла короче изображаютъ такъ:

$$\iint f(x)\,dx^2,\ \iiint f(x)\,dx^3,\ \text{или: } \int^{(2)} f(x)\,dx^2,\ \int^{(3)} f(x)\,dx^3,$$

и называютъ *интегралами втораго* и *третьяго порядка.*

Если $f(x)$ есть n-ая производная y, то y по отношенію къ $f(x)$ будетъ *интеграломъ n-го порядка:*

$$y^{(n)} = f(x),\ \ y = \int^{(n)} f(x)\,dx^n.$$

Въ результатѣ двойнаго интегрированія, кромѣ функціи, зависящей отъ данной, войдетъ цѣлая вида: $C_1x + C_2$, въ которой коэффиціенты C_1 и C_2 постоянныя произвольныя; въ результатѣ тройнаго интегрированія — цѣлая вида: $C_1x^2 + C_2x + C_3$, (C_1, C_2, C_3 пост. произвольныя), и т. д. Вообще интегралъ n-го порядка $\left(\int^{(n)} f(x)\,dx^n\right)$ имѣетъ видъ:

$$\varphi(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n \left(\begin{matrix} C_1, C_2, \ldots, C_n \\ \text{пост. произвольныя}\end{matrix}\right).$$

n-ая производная какъ этого интеграла, такъ и части его $\varphi(x)$,

равна $f(x)$; а n-ая производная другой части (заключающей пост. произвольныя) равна 0.

Примѣры:

a) $$y''' = \frac{1}{x} + \sin 2x; \text{ найти } y.$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{x} + \sin 2x\right) dx = lx - \frac{\cos 2x}{2} + C,$$

$$y' = \int\int \left(\frac{1}{x} + \sin 2x\right) dx^2 = \int \left(lx - \frac{\cos 2x}{2} + C\right) dx$$

$$= xlx - x - \frac{\sin 2x}{4} + Cx + C_2,$$

$$y = \int\int\int \left(\frac{1}{x} + \sin 2x\right) dx^3 = \int \left(xlx - x - \frac{\sin 2x}{4} + Cx + C_2\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} lx + \frac{\cos 2x}{8} + \left(\frac{C}{2} - \frac{3}{4}\right) x^2 + C_2 x + C_3$$

$$= \frac{x^2}{2} lx + \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

b) $$y^{(4)} = \frac{5x^2 - 1}{(x^2 + 1)^4}; \quad \text{найти } y.$$

$$y = \int^{(4)} \frac{5x^2 - 1}{(x^2 + 1)^4} dx^4 = \frac{x \operatorname{arc tg} x}{8} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Если одинъ изъ интеграловъ n-го порядка данной функціи найденъ, то, чтобы получить всѣ, надобно къ найденному прибавить сумму:

$$C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

въ которой $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ и C_n постоянныя произвольныя. Это видно изъ разности между двумя интегралами n-го порядка одной и той же функціи; разность эта есть или постоянное число, или цѣлая функція не выше $(n-1)$-ой степени; Дѣйствительно: если производныя n-го порядка отъ функцій u и v одинаковы, то:

$$(u - v)^{(n)} = 0,$$

откуда:

$$u - v = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

447. Кратный интегралъ функцiи объ одной перемѣнной приводится къ совокупности одиночныхъ интеграловъ. Обозначая $\int f(x)\,dx$ чрезъ p, и интегрируя по частямъ pdx, получимъ:

$$\int pdx = xp - \int xdp\,,\ \text{или:}$$

$$\int^{(2)} f(x)\,dx^2 = x\int f(x)\,dx - \int x f(x)\,dx.$$

Такимъ образомъ интегралъ втораго порядка приведенъ къ двумъ интеграламъ перваго порядка. Часть этого интеграла, содержащая постоянныя произвольныя, $(C_1 x + C_2)$, заключается въ полученныхъ членахъ: $C_1 x$ въ первомъ, а C_2 во второмъ.

Обозначая теперь интегралы $\int f(x)dx$ и $\int xf(x)dx$, первый опять черезъ p, а второй черезъ q, получимъ:

$$\int^{(2)} f(x)dx^2 = xp - q;$$

по этому:

$$\int^{(3)} f(x)\,dx^3 = \int xp\,dx - \int qdx = \int pd\frac{x^2}{1.2} - \int qdx$$

$$= \frac{x^2}{1.2}p - \int \frac{x^2}{1.2}dp - xq + \int xdq\,;$$

но: $dp = f(x)\,dx$, $dq = x f(x)\,dx$; слѣдовательно:

$$\int^{(3)} f(x)\,dx^3 = \frac{1}{1.2}\Big[x^2\int f(x)\,dx - 2x\int x f(x)\,dx + \int x^2 f(x)\,dx\Big].$$

И здѣсь въ полученныхъ трехъ членахъ заключаются: въ первомъ $C_1 x^2$, во второмъ $C_2 x$, въ третьемъ C_3.

Также нашли-бы:

$$\int^{(4)} f(x)\,dx^4 = \frac{1}{1.2.3}\Big[x^3\int f(x)\,dx - 3x^2\int x f(x)dx + 3x\int x^2 f(x)dx - \int x^3 f(x)\,dx\Big].$$

По аналогiи:

$$\int^{(n+1)} f(x)dx^{n+1} =$$

$$=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\Big[x^n\int f(x)dx-nx^{n-1}\int xf(x)dx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int x^2f(x)dx-\ldots.$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}nx\int x^{n-1}f(x)dx+(-1)^n\int x^n f(x)\,dx\Big].$$

Въ справедливости этой формулы убѣдимся, если, допустивши ее при нѣкоторомъ опредѣленномъ значеніи n, распространимъ и на значеніе n, единицею большее, — или еще лучше: продифференцируемъ послѣднее выраженіе $n+1$ разъ, и покажемъ, что результатъ дифференцированія будетъ $f(x)$.

Соединимъ прежде всѣ члены его въ одинъ интегралъ. Этого достигнемъ, замѣняя неопредѣленные интегралы опредѣленными, и внося потомъ множители, стоящіе внѣ интеграла, подъ знакъ интеграла:

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(z)\,dz+C$$

$$x^m\int f(x)dx=x^m\int_a^x f(z)\,dz+Cx^m=\int_a^x x^m f(z)dz+Cx^m \quad *).$$

Такимъ образомъ, обозначая вторую часть по аналогіи написанной формулы буквою X, получимъ:

$$X=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_a^x\Big[x^n-nx^{n-1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}z^2-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}nxz^{n-1}+(-1)^n z^n\Big]f(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\Big(c_0x^n+\ldots+c_{n-1}x+c_n\Big).$$

Произведенія постоянныхъ произвольныхъ $c_0, c_1, \ldots, c_n$ на $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$ обозначимъ чрезъ: $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n$; тогда замѣчая сверхъ того, что:

$$x^n-nx^{n-1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}z^2-\ldots.+(-1)^n z^n=(x-z)^n,$$

---

*) Внося x^m подъ знакъ интеграла, мы, конечно, при интегрированіи $x^m f(z)\,dz$, будемъ x считать постояннымъ.

получимъ:

$$X = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_a^x (x-z)^n f(z)dz + C_0x^n + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Теперь остается доказать, что производная отъ X $(n+1)$-го порядка равна $f(x)$. Дифференцируя сперва интегралъ $\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz$ по правилу n° 445, мы увидимъ, что производныя этого интеграла относительно x будутъ слѣдующія:

первагo порядка: $n\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz$,

втораго: $n(n-1)\int_a^x (x-z)^{n-2} f(z)\,dz$,

третьяго: $n(n-1)(n-2)\int_a^x (x-z)^{n-3} f(z)\,dz$

. . . .

. . . .

$(n-1)$-го: $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2\int_a^x (x-z) f(z)\,dz$

n-го: $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\int_a^x f(z)\,dz$

$(n+1)$-го: $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.f(x)$;

производная же $(n+1)$-го порядка суммы: $C_0x^n + C_1x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + C_{n-1}x + C_n$ есть 0; и потому:

$$X^{(n+1)} = f(x).$$

И такъ:

$$\int^{(n+1)} f(x)\,dx^{n+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_a^x (x-z)^n f(z)dz + C_0x^n + C_1x^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Примѣръ:

$$y''' = \operatorname{arc\,tg} x;$$

$$y = \int^{(3)} \operatorname{arc\,tg} x\, dx^3 = \frac{1}{2}\int_0^x (x-z)^2 \operatorname{arc\,tg} z\, dz + Cx^2 + C_2 x + C_3;$$

$$\frac{1}{2}\int_0^x (x-z)^2 \operatorname{arc\,tg} z\, dz = -\frac{1}{6}\int_0^x \operatorname{arc\,tg} z\, d[(x-z)^3] =$$

$$-\left[\frac{(x-z)^3}{6}\operatorname{arc\,tg} z\right]_0^x + \frac{1}{6}\int_0^x \frac{(x-z)^3}{z^2+1}\, dz$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^x \frac{z^3-3xz^2+3x^2z-x^3}{z^2+1}\, dz = -\frac{1}{6}\int_0^x (z-3x)\, dz - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{(3x^2-1)z-(x^3-3x)}{z^2+1}\, dz$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{z^2}{2} - 3xz\right)_0^x - \frac{1}{6}\left[\frac{3x^2-1}{2}\, l\,(z^2+1) - (x^3-3x)\operatorname{arc\,tg} z\right]_0^x$$

$$= \frac{5}{12}x^2 - \frac{3x^2-1}{12}\, l\,(x^2+1) + \frac{x^3-3x}{6}\operatorname{arc\,tg} x;$$

$$y = \frac{x^3-3x}{6}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{3x^2-1}{12}\, l\,(x+1) + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \qquad *).$$

ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦІЙ СО МНОГИМИ ПЕРЕМѢННЫМИ.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ПОЛНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ.

448. Пусть u функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y; требуется найти эту функцію по данному ея полному дифференціалу. Въ данномъ полномъ дифференціалѣ

$$du = X\,dx + Y\,dy$$

*) $\frac{5}{12}x^2$ заключается въ $C_1 x^2$, $C + \frac{5}{12}$ обозначено чрезъ C_1

X и Y будутъ частными производными отъ u, первая относительно x, вторая относительно y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X, \frac{\partial u}{\partial y} = Y,$$

по этому:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x};$$

слѣдовательно:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad (1).$$

Такому условію удовлетворяютъ коэффиціенты X и Y двучлена $X\,dx + Y\,dy$, когда этотъ двучленъ полный дифференціалъ. Отсюда заключаемъ, что не всякій двучленъ вида $X\,dx + Y\,dy$ есть полный дифференціалъ функціи. Необходимо (и, какъ послѣ увидимъ, достаточно) условіе (1), чтобы онъ былъ полнымъ дифференціаломъ.

Допустимъ, что условіе (1) соблюдено, и станемъ искать функцію u по ея частнымъ производнымъ: X и Y. Сперва обратимся къ: $\frac{\partial u}{\partial x} = X$; интегрируя эту частную производную по x, получимъ:

$$u = \int X\,dx = \int_a^x X\,dx + v,$$

гдѣ a опредѣленное число, (выбранное однакоже такъ, чтобы около $x = a$ функціи X и Y оставались сплошными), а v функція одной перемѣнной y. Если-бы искомое u удовлетворяло только одному условію: $\frac{\partial u}{\partial x} = X$, то v было-бы произвольною функціею y; но такъ какъ u удовлетворяетъ еще уравненію: $\frac{\partial u}{\partial y} = Y$, то функцію v надобно такъ подобрать, чтобы производная суммы: $\int_a^x X\,dx + v$ относительно y равнялась Y:

$$\left[\int_a^x X\,dx + v\right]'_y = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial y}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y} = Y.$$

$\frac{\partial X}{\partial y}$ тождественно равно $\frac{\partial Y}{\partial x}$ по условію (1); по этому:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = Y - \int_a^x \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx = Y - \left(Y - Y_a\right) = Y_a \quad *),$$

*) Y_a есть значеніе Y при $x = a$.

откуда:

$$v = \int Y_a\,dy = \int_b^y Y_a\,dy + C,$$

гдѣ b опредѣленное число, а C постоянная произвольная, не зависящая ни отъ x, ни отъ y.

И такъ:

$$u = \int_a^x X\,dx + \int_b^y Y_a\,dy + C.$$

При интегрированіи $X\,dx$ слѣдуетъ y, какъ независящій отъ x, считать постояннымъ.

Для повѣрки продиффенцируемъ найденное u по x и по y.

$$\left[\int_a^x X\,dx + \int_b^y Y_a\,dy + C\right]'_x = \left(\int_a^x X\,dx\right)'_x = X;$$

$$\left[\int_a^x X\,dx + \int_b^y Y_a\,dy + C\right]'_y = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial y}\,dx + Y_a =$$

$$= \int_a^x \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + Y_a = Y - Y_a + Y_a = Y.$$

Эта повѣрка указываетъ между прочимъ на то, что необходимое условіе $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ достаточно, чтобы сумма $X\,dx + Y\,dy$ была полнымъ дифференціаломъ.

Теперь спрашивается: всѣ-ли функціи, имѣющія полнымъ дифференціаломъ сумму $X\,dx + Y\,dy$, заключаются въ найденномъ выраженіи u. Допустимъ, что функція u_1 имѣетъ тотъ же полный дифференціалъ, т. е.:

$$du_1 = X\,dx + Y\,dy;$$

тогда:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = Y = \frac{\partial u}{\partial y};$$

стало-быть:

$$\frac{\partial (u_1 - u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (u_1 - u)}{\partial y} = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что разность $u_1 - u$ величина постоянная (не зависящая ни отъ x, ни отъ y).

Слѣдовательно нѣтъ такой функціи, которая, имѣя своимъ полнымъ дифференціаломъ сумму $X\,dx + Y\,dy$, не заключалось-бы въ выраженіи: $\int_a^x X\,dx + \int_b^y Y_a\,dy + C$.

Примѣры:

a) $du = (6x^2y^4 - 4x^3y^2 + 15x^2 - 8x + 2)dx + (8x^3y^3 - 2x^4y + 2y - 3)dy;$

$$\left.\begin{aligned}&\left(6x^2y^4 - 4x^3y^2 + 15x^2 - 8x + 2\right)'_y = 24x^2y^3 - 8x^3y\\&\left(8x^3y^3 - 2x^4y + 2y - 3\right)'_x = 24x^2y^3 - 8x^3y\end{aligned}\right\}\ \left(\begin{matrix}\text{условіе (1)}\\\text{соблюдено}\end{matrix}\right)$$

$$u = \int_0^x (6x^2y^4 - 4x^3y^2 + 15x^2 - 8x + 2)\,dx + \int_0^y (2y - 3)\,dy + C$$

$$= 2x^3y^4 - x^4y^2 + 5x^3 - 4x^2 + 2x + y^2 - 3y + C.$$

b) $du = \left(x + 2x\,lx - 2x\,ly - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x^2}{y} - 1\right)dy;$

$$u = \int_1^x \left(x + 2x\,lx - 2x\,ly - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \int_1^y \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{y} - 1\right)dy + C$$

$$= x^2\,l\frac{x}{y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - y + C.$$

c) $du = \left(\frac{2x}{x^2+3y} + \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{3}{x^2+3y} + \frac{1}{y^2}\right)dy;$

$$u = l(x^2 + 3y) + lx - \frac{1}{y} + C.$$

d) $du = [(2x + 3y)\sin x + (x^2 + 2xy - y)\cos x]\,dx +$

$$+ [(2x - 1)\sin x - \cos x - \operatorname{tg} y]\,dy;$$

$$u = (x^2 + 2xy - y)\sin x - y\cos x + l\cos y + C.$$

Замѣтимъ, что функцію u можно было-бы искать, интегрируя члены данной суммы въ обратномъ порядкѣ:

$$u = \int_\beta^y Y\,dy + \int_\alpha^x X_\beta\,dx + C.$$

449. Пусть теперь u функція трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y и z, и полный дифференціалъ ея

$$du = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

такъ что:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Y,\ \frac{\partial u}{\partial z} = Z.$$

Найдемъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять функціи X, Y и Z, чтобы трехчленъ $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ былъ полнымъ дифференціаломъ. Такъ какъ:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z},\ \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x},\ \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y},$$

то отсюда:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},\ \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x},\ \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \qquad (2).$$

Эти три тождества и представляютъ искомыя условія.

Допуская ихъ, будемъ искать функцію u по даннымъ ея частнымъ производнымъ: X, Y и Z. Беремъ сперва: $\frac{\partial u}{\partial x} = X$, откуда:

$$u = \int X\,dx = \int_a^x X\,dx + v.$$

v функція двухъ перемѣнныхъ y и z; ее надобно подобрать такъ, чтобы производныя $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ были Y и Z.

$$\left[\int_a^x X\,dx + v\right]'_y = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial y}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y} = Y,$$

$$\left[\int_a^x X\,dx + v\right]'_z = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial z}\,dx + \frac{\partial v}{\partial z} = Z.$$

Замѣняя $\frac{\partial X}{\partial y}$ и $\frac{\partial X}{\partial z}$ тождественно равными имъ $\frac{\partial Y}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial x}$ (на основаніи перваго и втораго изъ трехъ условій (2)), получимъ:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = Y - \int_a^x \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx = Y - (Y - Y_a) = Y_a.$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = Z - \int_a^x \frac{\partial Z}{\partial x} dx = Z - (Z - Z_a) = Z_a.$$

Стало-быть частныя производныя функціи v должны быть Y_a и Z_a, а по этому полный дифференціалъ:

$$dv = Y_a dy + Z_a dz.$$

Условіе, чтобы сумма $Y_a dy + Z_a dz$ была полнымъ дифференціаломъ, соблюдено: потому что третье изъ условій (2), имѣя мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ x, y и z, при $x = a$ дастъ:

$$\frac{\partial Y_a}{\partial z} = \frac{\partial Z_a}{\partial y}.$$

Зная полный дифференціалъ функціи v (функціи двухъ перемѣнныхъ y и z), мы найдемъ и v:

$$v = \int_b^y Y_a dy + \int_c^z Z_{ab} dz + C.$$

Z_{ab} есть значеніе Z_a при $y = b$, или, что все равно, значеніе Z при $x = a$ и при $y = b$; C постоянная произвольная (не зависящая ни отъ x, ни отъ y, ни отъ z).

И такъ:

$$u = \int_a^x X dx + \int_b^y Y_a dy + \int_c^z Z_{ab} dz + C.$$

Опредѣленныя числа a, b и c выбраны такъ, чтобы около $x = a$, $y = b$, $z = c$ функціи X, Y и Z оставались сплошными.

При интегрированіяхъ произведеній $X dx$ и $Y_a dy$ считаются постоянными, въ первомъ y и z, во второмъ z.

Не трудно доказать, что въ полученномъ выраженіи u заключаются всѣ функціи, удовлетворяющія вопросу, т. е. имѣющія полнымъ дифференціаломъ трехчленъ $X dx + Y dy + Z dz$; а что трехъ условій (2) достаточно, чтобы этотъ трехчленъ былъ полнымъ дифференціаломъ, можно видѣть по результатамъ дифференцированій суммы:

$$\int_a^x X dx + \int_b^y Y_a dy + \int_c^z Z_{ab} dz + C$$

по каждой изъ перемѣнныхъ x, y и z. Такъ для производной этой суммы по z имѣемъ:

$$\left[\int_a^x X dx + \int_b^y Y_a dy + \int_c^z Z_{ab}\, dz + C\right]'_z = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial z} dx + \int_b^y \frac{\partial Y_a}{\partial z} dy + Z_{ab}$$

$$= \int_a^x \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \int_b^y \frac{\partial Z_a}{\partial y} dy + Z_{ab} = Z - Z_a + Z_a - Z_{ab} + Z_{ab} = Z.$$

Измѣняя порядокъ интегрированій членовъ суммы $Xdx + Ydy + Zdz$, мы можемъ получить функцію u шестью манерами:

Примѣры:

a) $$du = (3x^2 y^2 z^2 - 2z^3 + y + 5)\, dx + (2x^3 y z^2 + x - 4y^3 z - 9y^2)\, dy +$$
$$+ (2x^3 y^2 z - 6xz^2 - y^4 + 4z^3)\, dz;$$

$$\left(3x^2y^2z^2 - 2z^3 + y + 5\right)'_y = 6x^2yz^2 + 1 = \left(2x^3yz^2 + x - 4y^3z - 9y^2\right)'_x$$

$$\left(3x^2y^2z^2 - 2z^3 + y + 5\right)'_z = 6x^2y^2z - 6z^2 = \left(2x^3y^2z - 6xz^2 - y^4 + 4z^3\right)'_x$$

$$\left(2x^3yz^2 + x - 4y^3z - 9y^2\right)'_z = 4x^3yz - 4y^3 = \left(2x^3y^2z - 6xz^2 - y^4 + 4z^3\right)'_y$$

(условія (2) соблюдены).

$$u = \int_0^x (3x^2y^2z^2 - 2z^3 + y + 5)dx - \int_0^y (4y^3z + 9y^2) dy + \int_0^z 4z^3 dz + C$$

$$= x^3y^2z^2 - 2xz^3 + xy + 5x - y^4z - 3y^3 + z^4 + C.$$

b) $$du = \left[\frac{3x^2}{x^3 + 5yz^2} + \frac{1}{y + 2z}\right] dx + \left[\frac{5z^2}{x^3 + 5yz^2} - \frac{x}{(y + 2z)^2}\right] dy +$$
$$+ \left[\frac{10yz}{x^3 + 5yz^2} - \frac{2x}{(y + 2z)^2}\right] dz;$$

$$u = \int_0^x \left(\frac{3x^2}{x^3 + 5yz^2} + \frac{1}{y + 2z}\right) dx + \int_1^y \frac{dy}{y} + \int_1^z \frac{2\, dz}{z} + C =$$

$$= \frac{x}{y + 2z} + l(x^3 + 5yz^2) + C.$$

450. Найти функцію по ея второму полному дифференціалу. Рѣшимъ этотъ вопросъ для функціи двухъ перемѣнныхъ. Пусть:

$$d^2 u = Pdx^2 + 2\,Qdx\,dy + Rdy^2\,;$$

P, Q и R (данныя функціи x и y) будутъ частными производными u втораго порядка:

$$P = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ Q = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ R = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3}$$

Отсюда видимъ, что, дифференцируя P по y, а Q по x, получимъ одинаковые результаты; одинаковые же результаты будутъ и отъ дифференцированія R по x, а Q по y, т. е:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{4}$$

Этимъ условіямъ должны удовлетворять функціи P, Q и R, чтобы трехчленъ $Pdx^2 + 2\,Qdx\,dy + Rdy^2$ былъ полнымъ дифференціаломъ втораго порядка. Предполагая, что эти условія имѣютъ мѣсто, станемъ искать функцію u по ея производнымъ втораго порядка. Изъ уравненій:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = R,$$

находимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int Pdx = \int_a^x Pdx + v \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int Rdy = \int_b^y Rdy + w \tag{6}$$

a и b опредѣленныя числа, v функція одного y, w функція одного x; y при интегрированіи Pdx, и x при интегрированіи Rdy, слѣдуетъ считать постоянными.

Чтобы опредѣлить функціи v и w, продифференцируемъ (5) по y, а (6) по x. Опираясь при этомъ на (3) и на (4), получимъ:

$$Q = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial v}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y} = Q - Q_a + \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$Q = \int_b^y \frac{\partial R}{\partial x} dy + \frac{\partial w}{\partial x} = \int_b^y \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial x} = Q \quad - Q_b + \frac{\partial w}{\partial x},$$

откуда:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = Q_a, \ \frac{\partial w}{\partial x} = Q_b,$$

а эти уравненія даютъ:

$$v = \int_\beta^y Q_a\, dy + C, \quad w = \int_\alpha^x Q_b\, dx + C_1,$$

гдѣ C и C_1 постоянныя произвольныя (независящія ни отъ x, ни отъ y).

И такъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_a^x P\, dx + \int_\beta^y Q_a\, dy + C,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_b^y R\, dy + \int_\alpha^x Q_b\, dx + C_1.$$

Теперь, зная частныя производныя $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, а стало-быть и полный дифференціалъ u перваго порядка, мы найдемъ и u.

Коэффиціенты суммы:

$$\left[\int_a^x P\, dx + \int_\beta^y Q_a\, dy + C\right] dx + \left[\int_b^y R\, dy + \int_\alpha^x Q_b\, dx + C_1\right] dy$$

удовлетворяютъ условію полнаго дифференціала: производная перваго коэффиціента по y равна производной втораго по x.

$$\left[\int_a^x P\, dx + \int_\beta^y Q_a\, dy + C\right]'_y = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + Q_a = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + Q_a = Q,$$

$$\left[\int_b^y R\, dy + \int_\alpha^x Q_b\, dx + C_1\right]'_x = \int_b^y \frac{\partial R}{\partial x} dy + Q_b = \int_b^y \frac{\partial Q}{\partial y} dy + Q_b = Q.$$

Примѣръ:

$$d^2u = -(4\, y^2 \sin 2\, x + 24\, x^2)\, dx^2 + 2\, (4\, y \cos 2\, x - \sin y)\, dx\, dy +$$
$$+ (2 \sin 2\, x - x \cos y)\, dy^2;$$

$$\left(-4y^2\sin 2x - 24x^2\right)'_y = -8y\sin 2x = \left(4y\cos 2x - \sin y\right)'_x$$

$$\left(2\sin 2x - x\cos y\right)'_x = 4\cos 2x - \cos y = \left(4y\cos 2x - \sin y\right)'_y$$

(условія (4) соблюдены)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\int_0^x (4y^2\sin 2x + 24x^2)\,dx + \int_0^y (4y - \sin y)\,dy + C$$

$$= 2y^2\cos 2x - 8x^3 + \cos y + C_1 \qquad (C-1 \text{ обозначено чрезъ } C_1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_0^y (2\sin 2x - x\cos y)\,dy + C_2 = 2y\sin 2x - x\sin y + C_2;$$

$$du = (2y^2\cos 2x - 8x^3 + \cos y + C_1)\,dx + (2y\sin 2x \quad x\sin y + C_2)\,dy;$$

$$u = \int_0^x (2y^2\cos 2x - 8x^3 + \cos y + C_1)\,dx + \int_0^y C_2\,dy + C_3$$

$$= y^2\sin 2x - 2x^4 + x\cos y + C_1 x + C_2 y + C_3.$$

Искать функцію по ея полному дифференціалу можно и не обращаясь къ общимъ формуламъ.

Пояснимъ это на послѣднемъ примѣрѣ.

Данъ второй полный дифференціалъ u:

$$d^2u = -(4y^2\sin 2x + 24x^2)\,dx^2 + 2(4y\cos 2x - \sin y)\,dx\,dy +$$
$$+ (2\sin 2x - x\cos y)\,dy^2;$$

другими словами: даны частныя производныя u втораго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -(4y^2\sin 2x + 24x^2),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 4y\cos 2x - \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\sin 2x - x\cos y;$$

требуется найти u.

Обращаемся къ данной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; интегрируя ее по x, получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\int (4y^2\sin 2x + 24x^2)\,dx = 2y^2\cos 2x - 8x^3 + v,$$

гдѣ v не зависитъ отъ x.

Продифференцируемъ полученное по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 4y \cos 2x + \frac{\partial v}{\partial y};$$

а по заданію: $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 4y \cos 2x - \sin y$; слѣдовательно:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\sin y,$$

откуда:

$$v = -\int \sin y\, dy = \cos y + C_1.$$

Теперь возьмемъ данную $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, и проинтегрируемъ ее по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int (2 \sin 2x - x \cos y)\, dy = 2y \sin 2x - x \sin y + w,$$

гдѣ w не зависитъ отъ y.

Дифференцируя по x и сравнивая потомъ результатъ съ данною $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$, получимъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = 4y \cos 2x - \sin y + \frac{\partial w}{\partial x} = 4y \cos 2x - \sin y,$$

откуда: $$\frac{dw}{dx} = 0, \quad w = C_2.$$

И такъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y^2 \cos 2x - 8x^3 + \cos y + C_1 \qquad (a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \sin 2x - x \sin y + C_2 \qquad (b).$$

Теперь по производнымъ $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ надобно найти u.

Помножая (a) на dx и интегрируя, потомъ дифференцируя результатъ по y, опираясь на (b), получимъ:

$$u = \int (2y^2 \cos 2x - 8x^3 + \cos y + C_1)\, dx =$$

$$= y^2 \sin 2x - 2x^4 + x \cos y + C_1 x + v_1$$

(v_1 не зависитъ отъ x)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \sin 2x - x \sin y + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 2y \sin 2x - x \sin y + C_2,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = C_2, \quad v_1 = C_2 y + C_3.$$

И такъ:

$$u = y^2 \sin 2x - 2x^4 + x \cos y + C_1 x + C_2 y + C_3.$$

451. Если даны не всѣ частныя производныя (перваго порядка), то, при отысканіи по нимъ функціи, примемъ за постоянныя тѣ перемѣнныя, по которымъ не даны производныя; а постоянную произвольную, входящую въ искомую функцію, будемъ разсматривать, какъ произвольную функцію этихъ перемѣнныхъ.

Примѣры:

a) u функція x и y; $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + xy + 1$; найти u.

$$u = \int (x^2 + xy + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} + x + \varphi(y) \quad \left(\varphi \text{ произвольная функція}\right)$$

b) u функція x, y, z и t; $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + xy + 1$; найти u.

$$u = \int (x^2 + xy + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} + x + \psi(y, z, t) \quad \left(\psi \text{ произвольная функція}\right).$$

c) u функція x, y и z; $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + 2xy + z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2 - yz$; найти u.

$$u = \int_0^x (x^2 + 2xy + z)\,dx + \int_0^y (y^2 - yz)\,dy + \varphi(z)$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y + xz + \frac{y^3}{3} - \frac{y^2 z}{2} + \varphi(z).$$

d) $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + yz + t^2$; $u = \frac{x^3}{3} + xyz + xt^2 + \psi(y, z, t)$.

e) $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + yz + t^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz + yt$;

$$u = \frac{x^3}{3} + xyz + xt^2 + \frac{y^2 t}{2} + \xi(z, t).$$

КРАТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНІЕ. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

452. По данной производной втораго порядка (по x и по y)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f(x, y),$$

функція найдется двойнымъ интегрированіемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int f(x,y)\,dy,\quad u=\int\left[dx\int f(x, y)\,dy\right].$$

При первомъ интегрированіи (по y) x, какъ независящій отъ y, считается постояннымъ; при второмъ (по x) y считается постояннымъ. Эти интегрированія, кромѣ функціи, зависящей отъ $f(x, y)$, доставятъ первое произвольную функцію одного x, второе произвольную функцію одного y. Стало-быть результатъ двойнаго интегрированія будетъ функція перемѣнныхъ x и y, зависящая отъ f, плюсъ сумма двухъ произвольныхъ функцій, изъ которыхъ одна не зависитъ отъ y, другая — отъ x.

Докажемъ, что **порядокъ интегрированія не имѣетъ вліянія на результатъ**, т. е. результатъ не зависитъ отъ того, проинтегрируемъ-ли мы функцію $f(x, y)$ сперва по y, потомъ по x, или наоборотъ. Другими словами: докажемъ, что разность между двойными интегралами:

$$\int\left[dx\int f(x,y)\,dy\right] \text{ и } \int\left[dy\int f(x, y)\,dx\right]$$

есть сумма двухъ произвольныхъ функцій, изъ которыхъ одна не зависитъ отъ y, а другая — отъ x.

Пусть u первый интегралъ, v второй; тогда:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f(x, y),\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}=f(x, y);$$

слѣдовательно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x},\ \text{ или: }\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},\ \text{ откуда:}$$

$$\frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x\, \partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial (u-v)}{\partial x} = \varphi(x) \qquad \left(\begin{matrix}\varphi \text{ произвольная}\\ \text{функція}\end{matrix}\right)$$

$$u - v = \int \varphi(x)\, dx = \xi(x) + \psi(y) \qquad \left(\begin{matrix}\xi \text{ и } \psi \text{ произволь-}\\ \text{ныя функціи}\end{matrix}\right).$$

Функціи разсматриваются здѣсь въ предѣлахъ ихъ сплошности.

Послѣднюю теорему легко распространить на тройные и вообще кратные интегралы послѣдовательнымъ измѣненіемъ порядка двухъ интегрированій.

Результатомъ тройнаго интегрированія функціи $f(x, y, z)$ будетъ функція перемѣнныхъ x, y и z, зависящая отъ f, сложенная съ тремя произвольными функціями, изъ которыхъ одна не зависитъ отъ x, другая отъ y, третья отъ z.

Дифференціальные множители въ кратныхъ интегралахъ будемъ ставить рядомъ, и въ такомъ порядкѣ относительно перемѣнныхъ, въ какомъ требуется интегрировать по этимъ перемѣннымъ; при этомъ можно ограничиться однимъ знакомъ интеграла, а указателемъ степени кратности его будетъ число дифференціальныхъ множителей. Такъ:

$$\iiint f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx \text{ или } \int f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

представляетъ тройной интегралъ отъ $f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$, въ которомъ требуется интегрировать сперва по z, потомъ по y и наконецъ по x; вообще выраженіе:

$$\int f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n$$

представляетъ кратный интегралъ n-го порядка, въ которомъ требуется выполнить интегрированіе сперва по x_1, потомъ по x_2, затѣмъ по x_3, и т. д., и наконецъ по x_n.

Примѣры на двойное и тройное интегрированія:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = l(x + 2y)$;

$$u = \iint l(x + 2y)\, dx\, dy = \frac{1}{4}\Big[(x+2y)^2\, l(x + 2y) - 6\, xy\Big] + \varphi(x) + \varphi_1(y).$$

b) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{2x(y^2-z^2)}{(y^2+z^2)^2};$$

$$u = \iiint \frac{2x(y^2-z^2)}{(y^2+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz = x^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z} + \psi(y,z) + \psi_1(x,z) + \\ + \psi_{11}(x,y).$$

Въ найденномъ двойномъ интегралѣ можно откидывать члены, содержащіе одну перемѣнную, включая ихъ въ произвольныя функціи. Тоже относится къ членамъ, содержащимъ только двѣ перемѣнныя, въ тройныхъ интегралахъ.

453. Разсмотримъ теперь двойной интегралъ:

$$\int_{x_0}^{x}\left[dx\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\right],$$

въ которомъ интегрированіе по y совершается въ предѣлахъ отъ y_0 до y (независящихъ отъ x), а по x отъ x_0 до x (независящихъ отъ y), — предполагая, что функція $f(x,y)$ остается сплошною по отношенію къ x отъ x_0 до x, а по отношенію къ y отъ y_0 до y. Обозначимъ неопредѣленный интегралъ $\int f(x,y)\,dy$ чрезъ $\varphi(x,y)$, а $\int \varphi(x,y)\,dx$ чрезъ $\xi(x,y)$, опуская при этомъ произвольныя функціи, какъ не имѣющія вліянія на интегралы, взятые въ предѣлахъ; тогда:

$$\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy = \varphi(x,y) - \varphi(x,y_0),$$

$$\int_{x_0}^{x}\left[dx\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\right] = \int_{x_0}^{x}\left[\varphi(x,y) - \varphi(x,y_0)\right]dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx - \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y_0)\,dx$$

$$= \xi(x,y) - \xi(x_0,y) - \xi(x,y_0) + \xi(x_0,y_0).$$

Измѣнимъ порядокъ интегрированія, т. е. возьмемъ интегралъ отъ $f(x,y)\,dx$ въ предѣлахъ отъ x_0 до x, и потомъ отъ этого интеграла интегралъ по y въ предѣлахъ отъ y_0 до y. Если интегралъ

$\int f(x, y)\,dx$ обозначимъ чрезъ $\psi(x, y)$, то интегралъ $\int \psi(x, y)\,dy$ можно представить опять функціею $\xi(x, y)$, пренебрегая и здѣсь произвольными функціями; и потому:

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx = \psi(x, y) - \psi(x_0, y),$$

$$\int_{y_0}^{y}\left[dy\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx\right] = \int_{y_0}^{y}\left[\psi(x, y) - \psi(x_0, y)\right]dy =$$

$$= \int_{y_0}^{y} \psi(x, y)\,dy - \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\,dy$$

$$= \xi(x, y) - \xi(x, y_0) - \xi(x_0, y) + \xi(x_0, y_0) \text{ *)}.$$

Слѣдовательно:

$$\int_{x_0}^{x}\left[dx\int_{y_0}^{y} f(x, y)\,dy\right] = \int_{y_0}^{y}\left[dy\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx\right],$$

т. е. *результатъ двойнаго интегрированія сплошной функціи между предѣлами не зависитъ отъ порядка интегрированія*, предполагая, что предѣлы интегрированія по x не зависятъ отъ y, а предѣлы интегрированія по y не зависятъ отъ x. Это свойство двой-

---

*) Къ этому же результату пришли-бы, если-бы интегралъ $\int \psi(x, y)\,dy$ отличили отъ $\xi(x, y)$. Пусть онъ: $\xi_1(x, y)$; тогда результатъ былъ-бы: $\xi_1(x, y) - \xi_1(x, y_0) - \xi_1(x_0, y) + \xi_1(x_0, y_0)$. Но мы знаемъ, что разность между функціями $\xi_1(x, y)$ и $\xi(x, y)$ имѣетъ видъ: $\theta(x) + \theta_1(y)$; по этому:

$$\xi_1(x, y) = \xi(x, y) + \theta(x) + \theta_1(y)$$
$$-\xi_1(x, y_0) = -\xi(x, y_0) - \theta(x) - \theta_1(y_0)$$
$$-\xi_1(x_0, y) = -\xi(x_0, y) - \theta(x_0) - \theta_1(y)$$
$$\xi_1(x_0, y_0) = \xi(x_0, y_0) + \theta(x_0) + \theta_1(y_0);$$

а отсюда:

$$\xi_1(x, y) - \xi_1(x, y_0) - \xi_1(x_0, y) + \xi_1(x_0, y_0) = \xi(x, y) - \xi(x, y_0) - \xi(x_0, y) + \xi(x_0, y_0);$$

остальные члены попарно сокращаются

наго интеграла можно выразить и такъ: *при интегрированіи интеграла можно интегрировать подъ знакомъ интеграла.*

Докажемъ эту теорему не обращаясь къ интеграламъ неопредѣленнымъ. Обозначимъ первый изъ двухъ послѣднихъ интеграловъ чрезъ u, второй чрезъ v,

$$\int_{x_0}^{x}\left[dx\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\right]=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx=u$$

$$\int_{y_0}^{y}\left[dy\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\right]=\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy=v,$$

и продифференцируемъ ихъ по x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy.$$

Видимъ, что:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x},\ \text{или:}\ \frac{\partial(u-v)}{\partial x}=0.$$

Также нашли-бы:

$$\frac{\partial(u-v)}{\partial y}=0.$$

Стало-быть разность $u-v$ не зависитъ ни отъ x, ни отъ y, т. е. остается постоянною при всѣхъ значеніяхъ x и y.

Но при $x=x_0$, какъ u, такъ и v, а слѣдовательно и $u-v$, обращаются въ 0; по этому $u-v=0$ при всѣхъ значеніяхъ x и y, т. е.:

$$u=v.$$

Теорему эту легко распространить на тройные и вообще кратные интегралы.

Двойной интегралъ $\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx$, или $\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy$, есть такая функція x и y, которой вторая производная по x и по y равна $f(x,y)$, и которая уничтожается при $x=x_0$, каковъ-бы ни

былъ y (конечно, не выходящій изъ предѣловъ сплошности f), и при $y = y_0$, каковъ-бы ни былъ x.

Если и верхніе предѣлы интеграла постоянные, то, обозначивъ одинъ изъ нихъ, чрезъ X, а другой чрезъ Y, получимъ:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx\,dy = \xi(X,Y) - \xi(x_0,Y) -$$
$$- \xi(X,y_0) + \xi(x_0,y_0).$$

Интегралы $\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx$ и $\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx$ зависятъ отъ свойства функціи f и предѣловъ интегрированій; и потому они не измѣнятся, если мы, сохраняя функцію f и предѣлы интегрированій, замѣнимъ подъ знаками интеграла буквы x и y другими:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(a,b)\,db\,da$$

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(a,b)\,db\,da.$$

Тоже относится къ тройнымъ и вообще кратнымъ интеграламъ.

Измѣненіемъ порядка интегрированія, или, что все равно, интегрированіемъ подъ знакомъ интеграла, можно пользоваться для вывода опредѣленныхъ интеграловъ. Приведемъ нѣкоторые.

454. Помножимъ обѣ части равенства:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2} \quad (a > 0) \quad (\text{n}^\circ\ 436)$$

на da, и проинтегрируемъ по a между положительными предѣлами α и β:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx\,da = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{a\,da}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{\beta^2+b^2}{\alpha^2+b^2};$$

а измѣняя порядокъ интегрированія, получимъ:

$$\int_\alpha^\beta \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx\, da = \int_0^\infty \int_\alpha^\beta e^{-ax} \cos bx\, da\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\cos bx\, dx \int_\alpha^\beta e^{-ax}\, da\right] = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos bx\, dx \quad *);$$

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\, l \frac{\beta^2 + b^2}{\alpha^2 + b^2} \qquad \begin{pmatrix}\alpha > 0\\ \beta > 0\end{pmatrix}.$$

Эта формула даетъ безчисленное множество интеграловъ: потому что въ ней тремъ параметрамъ α, β и b можемъ давать какія-угодно значенія, при условіи только, чтобы первые два (α и β) оставались положительными.

Подъинтегральная функція $\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos bx$, на всемъ пути x отъ 0 до ∞, измѣняется сплошнымъ образомъ, и значенія ея при $x = 0$ и при $x = \infty$ не представляютъ неопредѣленности; значенія эти: $\beta - \alpha$ при $x = 0$, и 0 при $x = \infty$.

455. Помножимъ обѣ части равенства:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \qquad (a > 0) \quad (\text{n}^\circ\ 436)$$

на da, и проинтегрируемъ по a между положительными предѣлами α и β:

$$\int_\alpha^\beta \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx\, da = \int_\alpha^\beta \frac{b\, da}{a^2 + b^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{b} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{b};$$

а измѣняя порядокъ интегрированія, получимъ:

$$\int_\alpha^\beta \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx\, da = \int_0^\infty \int_\alpha^\beta e^{-ax} \sin bx\, da\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin bx\, dx;$$

---

*) $\int_\alpha^\beta e^{-ax}\, da = \left(-\frac{e^{-ax}}{x}\right)_\alpha^\beta = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}$.

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin bx\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{b} \qquad \begin{pmatrix}\alpha > 0\\ \beta > 0\end{pmatrix}.$$

Отсюда, подводя положительное число α къ 0, и сравнивая потомъ предѣлы, находимъ:

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-\beta x}}{x}\sin bx\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{b} \qquad (\beta > 0).$$

При безграничномъ увеличиваніи положительнаго β, переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \begin{pmatrix}+ \text{ когда } b > 0\\ - \text{ когда } b < 0\end{pmatrix}.$$

Этотъ нтегралъ (*Эйлера*) замѣчателенъ тѣмъ, что не зависитъ отъ абсолютной величины b, а только отъ знака b, такъ что при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ b, онъ остается постоянно равнымъ $\frac{\pi}{2}$, а при отрицательныхъ $-\frac{\pi}{2}$. Вслѣдствіе этого свойства, его можно преобразовать въ другой интегралъ, не содержащій b; дѣйствительно: считая $b > 0$, и полагая $bx = z$, откуда: $bdx = dz$, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

если же $b<0$, то, при положеніи: $-bx = z$, откуда: $bdx = -dz$, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = -\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = -\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

456. При $a > 0$ имѣемъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Помножимъ обѣ части на da и проинтегрируемъ по a между положительными предѣлами α и β:

$$\int_\alpha^\beta \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx\,da = \frac{\pi}{2}\int_\alpha^\beta da = (\beta - \alpha)\frac{\pi}{2}.$$

Измѣняя порядокъ интегрированія, получимъ:

$$\int_\alpha^\beta \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx\,da = \int_0^\infty \int_\alpha^\beta \frac{\sin ax}{x}\,da\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{dx}{x}\int_\alpha^\beta \sin ax\,da\right] = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}\,dx \quad *);$$

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}\,dx = (\beta - \alpha)\frac{\pi}{2} \qquad \begin{pmatrix}\alpha > 0\\ \beta > 0\end{pmatrix}.$$

Сдѣлаемъ здѣсь $\beta = 2$, и потомъ, подводя α къ 0, сравнимъ предѣлы; получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x^2}\,dx = \pi, \text{ или: } \int_0^\infty \frac{2\sin^2 x}{x^2}\,dx = \pi,$$

откуда:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

437. Обѣ части равенства:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad (a>0)$$

помножимъ на db, и проинтегрируемъ по b между предѣлами α и β (α и β произвольныя числа):

$$\int_\alpha^\beta \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx\,db = \int_\alpha^\beta \frac{b\,db}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{a^2+\beta^2}{a^2+\alpha^2};$$

измѣнимъ теперь порядокъ интегрированія:

---

*) $\int_\alpha^\beta \sin ax\,da = \left[-\frac{\cos ax}{x}\right]_\alpha^\beta = \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x}.$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx\,db = \int_{0}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ax}\sin bx\,db\,dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty}\left[e^{-ax}\,dx\int_{\alpha}^{\beta}\sin bx\,db\right] = \int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x}e^{-ax}\,dx;$$

слѣдовательно:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x}e^{-ax}\,dx = \frac{1}{2}l\,\frac{a^2+\beta^2}{a^2+\alpha^2} \qquad (a>0).$$

Отсюда при: $\alpha = 0,\ \beta = a$:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos ax}{x}e^{-ax}\,dx = \frac{1}{2}l\,2 \qquad (a>0)$$

Этотъ интегралъ, какъ видимъ, не зависитъ отъ a. Его по этому можно преобразовать въ другой, не содержащій a,—чего достигнемъ положеніемъ: $ax = z$:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos ax}{x}e^{-ax}\,dx = \int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos z}{z}e^{-z}\,dz = \int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x}e^{-x}\,dx.$$

Сдѣлаемъ $a = 2$; тогда:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{x}e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2}l2\,;$$

а отсюда:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}l2.$$

458. **Интегралъ:** $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}dx.$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a+b)x}{x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a-b)x}{x}dx;$$

а такъ какъ, считая a и b положительными, имѣемъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2} \quad \begin{pmatrix} + \text{ при } a > b \\ - \text{ при } a < b \end{pmatrix},$$

то:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{при } a > b),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = 0 \quad (\text{при } a < b),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{4} \quad (\text{при } a = b).$$

Послѣдній результатъ подтвердимъ, ставя a на мѣсто b:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos ax}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

И такъ интегралъ: $\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx$, при положительныхъ значеніяхъ a и b, принимаетъ только три значенія: $\frac{\pi}{2}$, 0 и $\frac{\pi}{4}$, первое при $a > b$, второе при $a < b$, и третье при $a = b$. Другими словами, онъ зависитъ только отъ знака разности $a - b$, и равенъ $\frac{\pi}{2}$ при $a - b > 0$, 0 при $a - b < 0$, и $\frac{\pi}{4}$ при $a - b = 0$.

При $b = 1$ послѣднія три формулы обращаются въ слѣдующія:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{если } a > 1),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos x}{x}\,dx = 0 \quad (\text{если } a < 1),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4} \quad (\text{если } a = 1).$$

459. Интегралы Лапласа. Помножая объ части равенства:

$$\frac{b}{a^2+b^2}=\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a>0)$$

на $\frac{\cos b}{b}db$, и интегрируя по b между предѣлами 0 и ∞, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx\cos b}{b}dx\,db$$

$$=\int_0^\infty\left[e^{-ax}dx\int_0^\infty\frac{\sin bx\cos b}{b}db\right]$$

$$=\int_0^1\left[e^{-ax}dx\int_0^\infty\frac{\sin bx\cos b}{b}db\right]+\int_1^\infty\left[e^{-ax}dx\int_0^\infty\frac{\sin bx\cos b}{b}db\right].$$

Интегралъ $\int_0^\infty\frac{\sin bx\cos b}{b}db$ обращается въ 0 при всякомъ положительномъ значенiи x, мѣньшемъ 1-цы, и въ $\frac{\pi}{2}$ при всякомъ x, большемъ 1-цы; по этому:

$$\int_0^1\left[e^{-ax}dx\int_0^\infty\frac{\sin bx\cos b}{b}db\right]=0$$

$$\int_1^\infty\left[e^{-ax}dx\int_0^\infty\frac{\sin bx\cos b}{b}db\right]=\frac{\pi}{2}\int_1^\infty e^{-ax}dx=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)_1^\infty=\frac{\pi e^{-a}}{2a};$$

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty\frac{\cos b\,db}{a^2+b^2}=\frac{\pi e^{-a}}{2a} \qquad (a>0).$$

Замѣняя a произведенiемъ $\alpha\beta$, и полагая: $b=\beta x$ (откуда $db=\beta dx$), по сокращенiи, получимъ:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\beta x\,dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{\pi e^{-\alpha\beta}}{2\alpha} \qquad \begin{pmatrix}\alpha>0\\ \beta>0\end{pmatrix},$$

а дифференцированiе по β доставитъ:

$$\int_0^\infty \frac{x \sin \beta x\, dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi e^{-\alpha\beta}}{2} \qquad \begin{pmatrix} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{pmatrix}.$$

Въ двухъ послѣднихъ интегралахъ подъинтегральныя функціи — четныя; слѣдовательно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \beta x\, dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi e^{-\alpha\beta}}{\alpha}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \beta x\, dx}{x^2+\alpha^2} = \pi e^{-\alpha\beta}.$$

(интегралы Лапласа).

460. Интегралы: $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$ и $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Преобразуемъ интегралъ $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$ въ другой введеніемъ вмѣсто y новой перемѣнной t, связанной съ y уравненіемъ: $y = xt$. Такъ какъ при интегрированіи по y, а теперь по t, слѣдуетъ считать x постояннымъ, то: $dy = x dt$, и тогда:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx = \int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-x^2(1+t^2)}\, dt\, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-x^2(1+t^2)}\, dx\, dt.$$

Но: $\int_0^\infty x e^{-x^2(1+t^2)}\, dx = \left[-\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)} \right]_0^\infty = \frac{1}{2(1+t^2)};$

по этому:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Функція $e^{-(x^2+y^2)}$ четная, какъ относительно x, такъ и относительно y; по этому:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \pi.$$

Обозначая интегралъ $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ чрезъ p, имѣемъ:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2} e^{-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \left[e^{-y^2} dy \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right] = \int_0^\infty p e^{-y^2}\,dy = p \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = p^2;$$

стало-быть $p^2 = \frac{\pi}{4}$, откуда: $p = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

И такъ:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \qquad \left(\begin{matrix}\text{интегралы}\\ \text{Эйлера}\end{matrix}\right).$$

461. Интегралы: $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx$ **и** $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\,dx \qquad (a > 0)$.

Въ формулѣ: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ положимъ: $x^2 = az^2$ $(a > 0)$; тогда:

$$x = z\sqrt{a}, \quad dx = \sqrt{a}\,.\,dz;$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{a} \int_0^\infty e^{-az^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

а отсюда:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \qquad (a > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \qquad (a > 0).$$

Первый изъ двухъ послѣднихъ интеграловъ представимъ подъ видомъ: $\frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{1}{2}}$, и будемъ дифференцировать его по a; тогда, помножая всякій разъ послѣ дифференцированія обѣ части на -1, получимъ:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} a^{-\frac{5}{2}}$$

. . . .

. . . .

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} a^{-\frac{2n+1}{2}},$$

Послѣднюю формулу представимъ подъ видомъ:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a^n\sqrt{a}} \qquad (a>0).$$

Такъ какъ $x^{2n} e^{-ax^2}$ четная функція, то:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{a^n\sqrt{a}} \qquad (a>0).$$

При $a = 1$:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

462. Интегралъ: $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx\, dx$ $(a>0)$. Обозначая этотъ интегралъ чрезъ u, и дифференцируя его по b, получимъ:

$$\frac{du}{db} = -\int_0^\infty e^{-ax^2} x \sin bx\, dx = \int_0^\infty \sin bx\, d\,\frac{e^{-ax^2}}{2a}$$

$$= -\frac{b}{2a}\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx\, dx = -\frac{b}{2a} u \quad *).$$

*) Членъ $\left(\frac{e^{-ax^2}}{2a} \sin bx\right)_0^\infty$ обращается въ 0.

Отсюда:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial b}}{u} = -\frac{b}{2a};$$

а умножая на db и интегрируя по b въ предѣлахъ 0 и b:

$$\int_0^b \frac{\frac{\partial u}{\partial b}db}{u} = -\frac{1}{2a}\int_0^b b\,db, \text{ или: } l\frac{u}{u_0} = -\frac{b^2}{4a},$$

откуда

$$u = u_0 e^{-\frac{b^2}{4a}},$$

гдѣ u_0 есть значенiе u при $b = 0$, т. е. $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$, или: $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$.

Итакъ:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}} \qquad (a>0).$$

463. Формула Стирлинга. Воспользуемся интегралами n° n° 460 и 461 для вывода *формулы Стирлинга*, служащей къ вычисленiю произведенiя 1.2.3.4.5....n, когда n довольно большое число. Мы знаемъ, что:

$$1.2.3\ldots.n = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx \qquad (\text{n}^0\ 432).$$

Произведенiе $x^n e^{-x}$ при $x = 0$ обращается въ 0; затѣмъ съ возрастанiемъ x растетъ, и достигаетъ наибольшаго значенiя при $x=n$; при дальнѣйшемъ возрастанiя x оно уменьшается, и при $x=\infty$ обращается опять въ 0.

Наибольшее значенiе этой функцiи будетъ $n^n e^{-n}$. Представимъ ее произведенiемъ:

$$n^n e^{-n} e^{-t^2}.$$

Это произведенiе при $t = -\infty$ обращается въ 0; за тѣмъ съ возрастанiемъ t растетъ, достигая наибольшаго значенiя $n^n e^{-n}$ при

$t=0$, за которымъ съ возрастаніемъ t уменьшается, и при $t=\infty$ обращается опять въ 0. Такимъ образомъ изъ уравненія:

$$x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-t^2},$$

связывающаго перемѣнныя x и t, видимъ, что когда t увеличивается, измѣняясь отъ $-\infty$ до $+\infty$, перемѣнная x также увеличивается, измѣняясь отъ 0 до ∞, и когда t проходитъ чрезъ 0, тогда x проходитъ чрезъ n. Вводя вмѣсто x новую перемѣнную t, получимъ:

$$1.2.3\ldots n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Развернемъ функціи x и $\frac{dx}{dt}$ въ строки по степенямъ t, употребляя при этомъ способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Такъ какъ $x=n$ при $t=0$, то членъ, свободный отъ t, въ разложеніи x будетъ n; по этому:

$$x = n + At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + Et^5 + \ldots.$$

$$\frac{dx}{dt} = A + 2Bt + 3Ct^2 + 4Dt^3 + 5Et^4 + \ldots.$$

$$1.2.3\ldots n = n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(A + 2Bt + 3Ct^2 + 4Dt^3 + 5Et^4 + \ldots.)\,dt$$

$$= n^n e^{-n}\int_0^\infty e^{-t^2}(2A + 6Ct^2 + 10Et^4 + \ldots.)\,dt.$$

Замѣтимъ, что всѣ эти разложенія (такъ какъ мы разсматриваемъ ихъ безъ остаточныхъ членовъ) остаются подъ сомнѣніемъ.

Для опредѣленія коэффиціентовъ $A, B, C, D, E, \ldots$, прологарифмируемъ уравненіе, связывающее x съ t:

$$nlx - x = nln - n - t^2,$$

а это продифференцируемъ и помножимъ на $-x$; тогда:

$$(x-n)\frac{dx}{dt} = 2xt,$$

или:

$$\left[At+Bt^2+Ct^3+Dt^4+Et^5+\dots\right]\left[A+2Bt+3Ct^2+4Dt^3+5Et^4+\dots\right]=$$

$$=2nt+2At^2+2Bt^3+2Ct^4+2Dt^5+\dots$$

Это тождество даетъ:

$A^2=2n$	$A=\sqrt{2n}$
$3AB=2A$	$B=\frac{2}{3}$
$4AC+2B^2=2B$	$C=\frac{1}{9\sqrt{2n}}$
$5AD+5BC=2C$	$D=-\frac{4}{135.2n}$
$6AE+6BD+3C^2=2D$	$E=\frac{1}{270.2n\sqrt{2n}}$
....	....
....	....

$\sqrt{2n}$, выражающій A, и за тѣмъ входящій въ $C, E, \dots$, слѣдуетъ взять положительнымъ, потому что $x>n$ при $t>0$.

Разлагая интегралъ въ выраженіи произведенія $1.2.3\dots n$, получимъ:

$$1.2.3\dots n=n^ne^{-n}\left[2A\int_0^\infty e^{-t^2}dt+6C\int_0^\infty t^2e^{-t^2}dt+10E\int_0^\infty t^4e^{-t^2}dt+\dots\right]$$

$$=n^ne^{-n}\left[2A\frac{\sqrt{\pi}}{2}+6C\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+10E\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\dots\right] \quad {}^{*)}$$

$$=n^ne^{-n}\sqrt{\pi}\left(A+\frac{3C}{2}+\frac{15E}{4}+\dots\right)$$

$$=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\dots\right)$$

---

*) $\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_0^\infty t^2e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_0^\infty t^4e^{-t^2}dt=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ...

И такъ приблизительно имѣемъ:

$$1.2.3\dots n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi};$$

точнѣе:

$$1.2.3\dots n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\left(1+\frac{1}{12n}\right);$$

еще точнѣе:

$$1.2.3\dots n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}\right).$$

Строгій выводъ формулы Стирлинга см. въ прибавленіяхъ.

Эйлеровы интегралы перваго вида.

464. Интегралъ: $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ (функція двухъ параметровъ p и q) называютъ **Эйлеровымъ перваго вида**, и обозначаютъ чрезъ $B(p, q)$ или $\left(\frac{p}{q}\right)$. Мы примемъ первое обозначеніе. Интегралъ этотъ существуетъ только при положительныхъ значеніяхъ p и q. Онъ дѣлается безконечнымъ, когда оба параметра, или одинъ изъ нихъ, принимаютъ отрицательное значеніе, или 0. Считая ω и ε положительными, будемъ разсматривать

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

какъ предѣлъ, къ которому стремится $\int_\omega^{1-\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$, когда ω и ε подходятъ къ 0.

Возьмемъ между 0 и 1 постоянное число k; разложимъ послѣдній интегралъ на два: одинъ въ предѣлахъ ω и k, другой въ предѣлахъ k и $1-\varepsilon$, и преобразуемъ ихъ:

$$\int_\omega^{1-\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_\omega^k x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_k^{1-\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$=(1-x_1)^{q-1}\int_\omega^k x^{p-1}dx+x_{11}^{p-1}\int_k^{1-\varepsilon}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=(1-x_1)^{q-1}\frac{k^p-\omega^p}{p}+x_{11}^{p-1}\frac{(1-k)^q-\varepsilon^q}{q},$$

гдѣ x_1 есть одна изъ среднихъ величинъ между ω и k, а x_{11} одна изъ среднихъ между k и $1-\varepsilon$.

Множители $(1-x_1)^{q-1}$ и x_{11}^{p-1} заключаются между опредѣленными числами, а именно: первый между 1 и $(1-k)^{q-1}$, второй между k^{p-1} и 1. Множитель $\frac{k^p-\omega^p}{p}$ стремится къ $\frac{k^p}{p}$, если $p>0$, и безгранично растетъ, принимая значенія положительныя, когда $p<0$. Множитель $\frac{(1-k)^q-\varepsilon^q}{q}$ стремится къ $\frac{(1-k)^q}{q}$, если $q>0$, и растетъ безгранично, принимая положительныя значенія, если $q<0$. Отсюда заключаемъ, что интегралъ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ дѣлается безконечнымъ при $\begin{pmatrix}p<0\\q>0\end{pmatrix}$, при $\begin{pmatrix}p>0\\q<0\end{pmatrix}$ и при $\begin{pmatrix}p<0\\q<0\end{pmatrix}$.

При $p=0$, вмѣсто дроби $\frac{k^p-\omega^p}{p}$ имѣли-бы $l\frac{k}{\omega}$; при $q=0$ дробь $\frac{(1-k)^q-\varepsilon^q}{q}$ замѣнилась-бы выраженіемъ $l\frac{1-k}{\varepsilon}$; а такъ какъ каждый изъ этихъ логариѳмовъ безгранично ростетъ, принимая значенія положительныя, то интегралъ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ дѣлается безконечнымъ при $\begin{pmatrix}p=0\\q\gtrless 0\end{pmatrix}$, при $\begin{pmatrix}q=0\\p\gtrless 0\end{pmatrix}$ и при $\begin{pmatrix}p=0\\q=0\end{pmatrix}$.

И такъ функцію $B(p, q)$ будемъ разсматривать только при положительныхъ значеніяхъ параметровъ.

Преобразуемъ ее въ другой интегралъ, полагая: $x=\sin^2\varphi$:

$$B(p, q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\, d\varphi.$$

465. **Интегралъ $B(p, q)$ есть функція симметрическая относи**тельно p и q, (не измѣняется отъ замѣны p на q, и q на p), т. е.:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx.$$

Полагая $1-x=z$ (откуда: $x=1-z$, $dx=-dz$), находимъ:

$$B(q,p)=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx=-\int_1^0 z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz=$$

$$=\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz=B(p,q).$$

466. Эйлеровы интегралы приводятся къ интеграламъ, параметры которыхъ не болѣе 1-цы.

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1(1-x)^{q-1}d\frac{x^p}{p}$$

$$=\left[\frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1}\right]_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=\frac{q-1}{p}B(p+1,q-1)\ (q>1)$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\int_0^1 x^{p-1}d\frac{(1-x)^q}{q}$$

$$=\left[-\frac{(1-x)^q}{q}x^{p-1}\right]_0^1+\frac{p-1}{q}\int_0^1 x^{p-2}(1-x)^q dx=\frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)(p>1)$$

Эту формулу можно получить изъ предыдущей, которая даетъ:

$$B(p+1,q-1)=\frac{p}{q-1}B(p,q);$$

а отсюда, мѣняя p на $p-1$, а q на $q+1$, получимъ:

(a) $$B(p,q)=\frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)\qquad(p>1).$$

Сдѣлаемъ еще слѣдующее преобразованіе:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}(1-x)dx$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx-\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=B(p,q-1)-B(p+1,q-1),$$

$$B(p,q)=B(p,q-1)-\frac{p}{q-1}B(p,q);$$

отсюда:

(b) $$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1) \qquad (q>1).$$

Съ помощію этой формулы можно понизить параметръ q на одну единицу, не измѣняя параметра p. Подставляя въ ней $p-1$ вмѣсто p, и $q+1$ вмѣсто q, получимъ:

$$B(p-1,q+1)=\frac{q}{p+q-1}B(p-1,q) \qquad (p>1).$$

По этому, опираясь на (a), имѣемъ:

(c) $$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q), \qquad (p>1)$$

формулу, служащую къ пониженію параметра p.

Ее можно получить изъ (b), опираясь на симметричность функціи $B(p,q)$. Обмѣнъ параметровъ p и q во второй части (b) приведетъ къ:

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(q,p-1);$$

затѣмъ, мѣняя въ $B(q,p-1)$ параметры q и $p-1$, получимъ:

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q).$$

Подобнымъ же образомъ можно вывести и (b) изъ (c).

Напишемъ теперь въ (c) $q-1$ на мѣсто q; получимъ:

$$B(p,q-1)=\frac{p-1}{p+q-2}B(p-1,q-1), \quad \binom{p>1}{q>1},$$

что въ соединеніи съ (b) доставитъ:

$$B(p,q)=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}B(p-1,q-1), \qquad \binom{p>1}{q>1}$$

формулу, служащую къ пониженію обоихъ параметровъ, каждаго на одну единицу.

Полагая $p>m$, $q>n$ (m и n цѣлыя числа), составимъ формулу, приводящую $B(p,q)$ къ $B(p-m,q-n)$, т. е. служащую къ пониженію обоихъ параметровъ, перваго на m единицъ, втораго на n.

Подставляя въ (c) на мѣсто p послѣдовательно: p, $p-1$, $p-2$,... ..., $p-(m-1)$, и въ (b) на мѣсто q послѣдовательно: q, $q-1$, $q-2$, ..., $q-(n-1)$, получимъ:

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$$

$$B(p-1,q)=\frac{p-2}{p+q-2}B(p-2,q)$$

$$B(p-2,q)=\frac{p-3}{p+q-3}B(p-3,q)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$B(p-(m-1),q)=\frac{p-m}{p+q-m}B(p-m,q)$$

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$$

$$B(p,q-1)=\frac{q-2}{p+q-2}B(p,q-2)$$

$$B(p,q-2)=\frac{q-3}{p+q-3}B(p,q-3)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$B(p,q-(n-1))=\frac{q-n}{p+q-n}B(p,q-n),$$

откуда, послѣ перемноженія и сокращенія:

$$B(p,q)=\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-m)}{(p+q-1)(p+q-2)\dots(p+q-m)}B(p-m,q),$$

$$B(p,q)=\frac{(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(p+q-1)(p+q-2)\dots(p+q-n)}B(p,q-n).$$

Первая изъ этихъ двухъ формулъ служитъ къ пониженію параметра p на m единицъ, вторая—къ пониженію параметра q на n единицъ. Перемноживъ ихъ, замѣнивши предварительно во второй p на $p-m$, получимъ послѣ сокращенія:

$$B(p,q)=\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-m)(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(p+q-1)(p+q-2)\dots(p+q-m)(p+q-m-1)(p+q-m-2)\dots(p+q-m-n)}B(p-m,q-n),$$

формулу для пониженія обоихъ параметровъ разомъ, перваго на m, втораго на n единицъ.

Если p и q дробныя числа, а m и n цѣлыя части этихъ дробей, то послѣдняя формула приводитъ интегралъ $B(p,q)$ къ интегралу, въ которомъ параметры заключаются между 0 и 1. Напримѣръ:

$$B\left(\frac{9}{2},\frac{8}{3}\right)=\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{37}{6}\cdot\frac{31}{6}\cdot\frac{25}{6}\cdot\frac{19}{6}\cdot\frac{13}{6}\cdot\frac{7}{6}}B\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)=\frac{1944}{283309}B\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right).$$

Если p и q цѣлыя числа, то, подставляя $p-1$ и $q-1$ на мѣсто m и n, получимъ:

$$B(p,q)=\frac{(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1.(q-1)(q-2)\ldots 3.2.1}{(p+q-1)(p+q-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4.3.2}B(1,1);$$

а такъ какъ: $B(1,1)=\int_0^1 dx=1$, то:

$$B(p,q)=\frac{(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1.(q-1)(q-2)\ldots 3.2.1}{(p+q-1)(p+q-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4.3.2}.$$

Напр.:

$$B(5,3)=\int_0^1 x^4(1-x)^2\,dx=\frac{4.3.2.1.2.1}{7.6.5.4.3.2}=\frac{1}{105}.$$

467. Дадимъ функціи $B(p,q)$ другой видъ; положимъ: $x=\frac{1}{z+1}$; тогда:

$$1-x=\frac{z}{z+1},\quad dx=-\frac{dz}{(z+1)^2};\text{ и потому:}$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=-\int_\infty^0\frac{z^{q-1}}{(z+1)^{p+q}}dz,$$

или:

$$B(p.q)=\int_0^\infty\frac{x^{q-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}};$$

а отсюда, опираясь на симметричность $B(p,q)$, или преобразовывая интегралъ въ другой положеніемъ $x=\frac{1}{y}$, получимъ:

$$B(p,q)=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}}.$$

Разложимъ $B(p,q)$ на два интеграла: одинъ въ предѣлахъ 0 и 1, другой въ предѣлахъ 1 и ∞, и преобразуемъ второй положеніемъ $x=\frac{1}{y}$:

$$B(p,q)=\int_0^1\frac{x^{q-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}}+\int_1^\infty\frac{x^{q-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}}=\int_0^1\frac{x^{q-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}}+\int_0^1\frac{y^{p-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}},$$

$$B(p,q)=\int_0^1\frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx.$$

При такомъ представленіи функціи $B(p,q)$, симметричность ея въ отношеніи къ p и q очевидна.

Пусть: $p+q=1$; тогда:

$$B(p, 1-p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\int_0^\infty \frac{x^{-p}\,dx}{1+x}.$$

Здѣсь: $p \gtrless {0 \atop 1}$; по этому, опираясь на n⁰ 434, имѣемъ:

$$B(p, 1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Примѣры:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\pi,$$

$$B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)=B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x)^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)=B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)=\pi\sqrt{2}.$$

Эйлеровы интегралы втораго вида.

468. Эйлеровымъ интеграломъ втораго вида, или функціею гамма называютъ интегралъ:

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx,$$

и обозначаютъ его чрезъ $\Gamma(p)$. Эта функція существуетъ только при положительныхъ значеніяхъ p, и дѣлается безконечною, когда $p<0$, или когда $p=0$. Замѣнимъ нижній предѣлъ интеграла чрезъ ω, а верхній чрезъ $\frac{1}{\varepsilon}$; тогда, считая $\omega>0$ и $\varepsilon>0$, мы можемъ разсматривать его, какъ предѣлъ интеграла $\int_\omega^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{p-1} e^{-x}\,dx$, когда ω и ε стремятся къ 0. Обозначая чрезъ k опредѣленное положительное число, имѣемъ:

$$\int_\omega^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{p-1} e^{-x}\,dx=\int_\omega^k x^{p-1} e^{-x}\,dx+\int_k^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{p-1} e^{-x}\,dx=$$

$$=e^{-x_1}\int_\omega^k x^{p-1}\,dx+x_{11}^{p-1}\int_k^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-x}\,dx=$$

$$=e^{-x_1}\cdot\frac{k^p-\omega^p}{p}+x_{11}^{p-1}\left(e^{-k}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right).$$

x_1 заключается между 0 и k; x_{11} болѣе k; e^{-x} заключается между 1 и e^{-k}; $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ стремится къ 0. Если p отрицательное, то дробь $\frac{k^p-\omega^p}{p}$ безгранично растетъ, принимая значенія положительныя, а множитель $x_{11}{}^{p-1}$ заключается между k^{p-1} и 0. При $p=0$ дробь $\frac{k^p-\omega^p}{p}$ замѣнится $l\frac{k}{\omega}$,—величиною положительною безгранично возрастающею, а $x_{11}{}^{p-1}$ будетъ дробь $\frac{1}{x_{11}}$, заключающаяся между $\frac{1}{k}$ и 0. Слѣдовательно при $p<0$ и при $p=0$ интегралъ $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ дѣлается безконечнымъ. По этому функцію $\Gamma(p)$ будемъ разсматривать только при положительныхъ значеніяхъ p. Полагая $e^{-x}=z$, откуда: $x=-lz=l\frac{1}{z}$, $e^{-x}dx=-dz$, мы можемъ представить ее другимъ интеграломъ:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=-\int_1^0\left(l\frac{1}{z}\right)^{p-1}dz=\int_0^1\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx.$$

469. Пониженіе параметра. Считая $p>1$, и интегрируя по частямъ $x^{p-1}e^{-x}dx$ между предѣлами 0 и ∞, получимъ:

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=-\int_0^\infty x^{p-1}d(e^{-x})=(-x^{p-1}e^{-x})_0^\infty+(p-1)\int_0^\infty x^{p-2}e^{-x}dx.$$

Произведеніе $x^{p-1}e^{-x}$ обращается въ 0 какъ при $x=\infty$, такъ и при $x=0$; по этому:

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=(p-1)\int_0^\infty x^{p-2}e^{-x}dx,$$

или:

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1).$$

Если $p>2$, то:

$$\Gamma(p-1)=(p-2)\Gamma(p-2),\ \ \Gamma(p)=(p-1)(p-2)\Gamma(p-2);$$

если $p>3$, то:

$$\Gamma(p-2)=(p-3)\Gamma(p-3),\ \Gamma(p)=(p-1)(p-2)(p-3)\Gamma(p-3);$$

вообще при $p > n$:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-n)\Gamma(p-n).$$

Такъ какъ $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, то при p цѣломъ:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\ldots3.2.1.\Gamma(1) = (p-1)(p-2)\ldots3.2.1.$$

Если p дробное число, превышающее 1-цу, и n заключающаяся въ немъ цѣлая часть, то, по формулѣ:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-n)\Gamma(p-n),$$

можно $\Gamma(p)$ привесть къ гамма отъ параметра, заключающагося между 0 и 1; такъ напримѣръ:

$$\Gamma\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{80}{27}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \text{ или:}$$

$$\int_0^\infty x^2\sqrt[3]{x^3}\cdot e^{-x}\,dx = \frac{80}{27}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Найдемъ: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^\infty \sqrt{x}\cdot e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \int_0^\infty x\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \int_0^\infty x^2\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

470. Связь между Эйлеровыми интегралами перваго и втораго вида. Полагая $a > 0$, и замѣняя въ интегралѣ $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ перемѣнную x чрезъ ay, и стало-быть dx чрезъ $a\,dy$, получимъ:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty a^p y^{p-1} e^{-ay}\, dy = a^p \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax}\, dx,$$

откуда:

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \qquad (a > 0).$$

Напишемъ $p+q$ вмѣсто p, и $1+a$ вмѣсто a:

$$\int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-(1+a)x}\, dx = \frac{\Gamma(p+q)}{(1+a)^{p+q}}.$$

Помножимъ обѣ части на $a^{p-1}\,da$, и проинтегрируемъ по a въ предѣлахъ 0 и ∞:

$$\int_0^\infty \left[a^{p-1} da \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-(1+a)x}\, dx\right] = \Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{a^{p-1}\, da}{(1+a)^{p+q}} =$$

$$= \Gamma(p+q)\, B(p, q).$$

Измѣняя порядокъ интегрированія въ двойномъ интегралѣ, получимъ:

$$\int_0^\infty \left[a^{p-1} da \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-(1+a)x}\, dx\right] = \int_0^\infty \left[x^{p+q-1} e^{-x} dx \int_0^\infty a^{p-1} e^{-ax}\, da\right];$$

а такъ какъ:

$$\int_0^\infty a^{p-1} e^{-ax}\, da = \frac{\Gamma(p)}{x^p},$$

то:

$$\int_0^\infty \left[a^{p-1} da \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-(1+a)x}\, dx\right] = \Gamma(p) \int_0^\infty x^{q-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

Слѣдовательно:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\, B(p, q),$$

откуда:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

По этой формулѣ вычисленія B приводятся къ вычисленіямъ Γ.

Сдѣлаемъ: $p+q=1$; тогда: $q=1-p$, $\Gamma(p+q)=\Gamma(1)=1$; и потому:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

По этой формулѣ вычисленіе $\Gamma(p)$, когда p болѣе $\frac{1}{2}$, но менѣе 1, приводится къ вычисленію $\Gamma(p)$ для значеній p между 0 и $\frac{1}{2}$.

При $p=\frac{1}{2}$ имѣемъ: $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$, откуда: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

471. Подставляя въ формулу: $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$ вмѣсто p дроби: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, получимъ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}}$$

. . . .

. . . .

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}},$$

откуда послѣ перемноженія:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n} \text{ *)};$$

а отсюда:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

---

*) Въ n° 279 при m четномъ имѣли:

Предѣлы интеграловъ:

$$\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx \text{ и } \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x} f(x)\,dx.$$

472. Пусть $f(x)$ сплошная функція на всемъ пути x отъ 0 до h. Найдемъ предѣлъ, къ которому стремится интегралъ

$$\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx \qquad \begin{pmatrix} h>0 \\ \alpha>0 \end{pmatrix}$$

при безграничномъ возрастаніи α. Полагая $\alpha x = y$, имѣемъ:

$$x = \frac{y}{\alpha},\ dx = \frac{dy}{\alpha},\ \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha h} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{\alpha}\right) dy,$$

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} f(0)\,dy = \frac{\pi}{2} f(0).$$

$$\frac{x^m-1}{x^2-1} = \left[x^2-2x\cos\frac{2\pi}{m}+1\right]\left[x^2-2x\cos\frac{4\pi}{m}+1\right]\ldots\left[x^2-2x\cos\frac{(m-2)\pi}{m}+1\right].$$

Напишемъ $2n$ на мѣсто m; тогда:

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \left[x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right]\left[x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right]\ldots\left[x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right].$$

Подставляя сюда вмѣсто x сначала 1, потомъ —1 получимъ:

$$n = 2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

$$n = 2^{n-1}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{n}\right)\ldots\left(1+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right);$$

а послѣ перемноженія и извлеченія квадратныхъ корней:

$$n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

откуда:

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \qquad \left(\begin{matrix}\text{другой выводъ}\\ \text{въ n}^0\ 280\end{matrix}\right).$$

Выводъ этотъ, какъ видимъ, очень простъ; но его нельзя назвать строгимъ, — потому что, при измѣненіи y отъ 0 до αh, отношеніе $\frac{y}{\alpha}$ проходитъ чрезъ всѣ значенія отъ 0 до h, и по этому является сомнѣніе, можно-ли предѣлъ отношенія $\frac{y}{\alpha}$ принять за 0 при всякомъ y. Чтобы полученный выводъ не оставлялъ сомнѣнія, приведемъ строгое доказательство. Пусть $\frac{\pi}{\alpha}$ заключается m разъ въ h, такъ что:

$$h = \frac{m\pi}{\alpha} + r, \qquad \left(\begin{array}{c} r \text{ или равно } 0, \text{ или} \\ \text{болѣе } 0, \text{ но менѣе } \frac{\pi}{\alpha} \end{array}\right).$$

Пусть k цѣлое число мѣньшее m; оно можетъ быть взято достаточно большимъ, потому что съ возрастаніемъ α растетъ и m.

Разложимъ интегралъ $\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx$ на интегралы въ предѣлахъ: 0 и $\frac{k\pi}{\alpha}$, $\frac{k\pi}{\alpha}$ и $\frac{(k+1)\pi}{\alpha}$, $\frac{(k+1)\pi}{\alpha}$ и $\frac{(k+2)\pi}{\alpha}$, и т. д.

$$\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{k\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx + S,$$

$$S = \int_{\frac{k\pi}{\alpha}}^{\frac{(k+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx + \int_{\frac{(k+1)\pi}{\alpha}}^{\frac{(k+2)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{\frac{(m-1)\pi}{\alpha}}^{\frac{m\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx + \int_{\frac{m\pi}{\alpha}}^{h} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx.$$

Если функція $f(x)$ на всемъ пути x отъ 0 до h принимаетъ положительныя значенія, то рядъ интеграловъ, составляющихъ сумму S,

есть рядъ знакоперемѣнный, потому что знаменатель дроби $\frac{\sin \alpha x}{x}$ въ каждомъ изъ этихъ интеграловъ положительный, а числитель, сохраняя знакъ на всемъ пути x отъ нижняго до верхняго предѣла, измѣняетъ его на противоположный при переходѣ къ сосѣднему интегралу. Если сверхъ того допустимъ, что значенія функціи $f(x)$ уменьшаются съ возрастаніемъ x отъ 0 до h, или что $f(x)$ есть число постоянное, то рядъ будетъ убывающій. Въ самомъ дѣлѣ: преобразуемъ второй членъ положеніемъ $x = \frac{\pi}{\alpha} + y$:

$$\int_{\frac{(k+1)\pi}{\alpha}}^{\frac{(k+2)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = \int_{\frac{k\pi}{\alpha}}^{\frac{(k+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin(\pi + \alpha y)}{\frac{\pi}{\alpha} + y} f\left(\frac{\pi}{\alpha} + y\right) dy =$$

$$= -\int_{\frac{k\pi}{\alpha}}^{\frac{(k+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{\frac{\pi}{\alpha} + x} f\left(\frac{\pi}{\alpha} + x\right) dx.$$

Этимъ преобразованіемъ мы привели второй членъ суммы S къ интегралу, предѣлы котораго одинаковы съ предѣлами интегрированія въ первомъ членѣ, — и такъ какъ теперь въ немъ подъинтегральная функція по абсолютной величинѣ менѣе, чѣмъ въ первомъ членѣ, то, опираясь на n°n° 376 и 377, заключаемъ, что второй членъ суммы S менѣе перваго по абсолютной величинѣ. Тоже заключеніе относится и къ другимъ сосѣднимъ членамъ. Слѣдовательно: если $f(x)$, сохраняя знакъ $+$ на протяженіи x отъ 0 до h, уменьшается съ возрастаніемъ x, или остается величиною постоянною, то рядъ членовъ суммы S есть рядъ знакоперемѣнный убывающій, и потому, въ такомъ предположеніи относительно $f(x)$, сумма S одного знака съ первымъ ея членомъ и менѣе его по абсолютной величинѣ:

$$S = \theta \int_{\frac{k\pi}{\alpha}}^{\frac{(k+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx \qquad \left(\begin{matrix}\theta > 0\\ < 1\end{matrix}\right).$$

Стало-быть:

$$\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{k\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx + \theta \int_{\frac{k\pi}{\alpha}}^{\frac{(k+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{k\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{\alpha}\right) dy + \theta \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{y} f\left(\frac{y}{\alpha}\right) dy.$$

Предѣлы интегрированій въ послѣднихъ интегралахъ не зависятъ отъ α, и потому съ возрастаніемъ α остаются безъ перемѣны; слѣдовательно:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx = \int_0^{k\pi} \frac{\sin y}{y} f(0)\,dy + \theta_0 \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{y} f(0)\,dy,$$

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\,dx - \theta_0 f(0) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy - f(0) \int_0^{k\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,,$$

гдѣ θ_0 есть предѣлъ θ и заключается между 0 и 1.

Съ возрастаніемъ k интегралъ $\int_0^{k\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy$ подходитъ къ $\frac{\pi}{2}$, а интегралъ $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy$ къ 0 *); первый же членъ послѣдняго равенства, какъ независящій отъ k, остается при этомъ безъ измѣненія; по этому, увеличивая k и переходя потомъ къ предѣламъ, находимъ:

---

*) Что этотъ интегралъ подходитъ къ 0, когда ростетъ k, можно видѣть изъ разложенія:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Такой результатъ мы получили при условіи, что $f(x)$ есть или постоянное число, или функція, сохраняющая знакъ $+$ при всѣхъ значеніяхъ x отъ 0 до h, и при томъ уменьшающаяся съ возрастаніемъ x. Пусть теперь на пути x отъ 0 до h функція $f(x)$ уменьшается, принимая отрицательныя значенія, или переходя изъ положительныхъ въ отрицательныя (при отрицательныхъ значеніяхъ она, конечно, численно увеличивается); тогда взявши достаточно большое положительное число c, чтобы сумма $c + f(x)$, уменьшаясь, сохраняла знакъ $+$, получимъ:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x}\Big[c + f(x)\Big]\, dx = \frac{\pi}{2}\Big[c + f(0)\Big] = \frac{\pi}{2} c + \frac{\pi}{2} f(0);$$

сверхъ того имѣемъ:

$$\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x}\Big[c + f(x)\Big]\, dx = \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} c\, dx + \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx,$$

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x}\Big[c + f(x)\Big] dx = \text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} c\, dx + \text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} c + \text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx;$$

и потому:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy = \int_0^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy - \int_0^{k\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy,$$

или изъ сравненія его съ интеграломъ $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dy}{y}$, который превышаетъ абсолютную величину перваго, и который, равняясь $l\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, стремится къ 0.

Если функція $f(x)$ увеличивается съ возрастаніемъ x отъ 0 до h, то функція $-f(x)$ уменьшается; тогда:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x}\left[-f(x)\right] dx = -\frac{\pi}{2} f(0);$$

а отсюда:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Осталось разсмотрѣть случай, когда функція $f(x)$ на пути x отъ 0 до h то увеличивается, то уменьшается (сохраняя, или не сохраняя знакъ). Докажемъ предварительно, что если $f(x)$ измѣняется въ одну сторону съ возрастаніемъ x отъ a до b, при $b > a > 0$, то интегралъ

$$\int_a^b \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx$$

съ возрастаніемъ α стремится къ 0. Вообразимъ такую функцію $\psi(x)$, которая на всемъ пути x отъ 0 до b измѣняется въ одну сторону, и имѣетъ значенія на пути x отъ a до b одинаковыя съ соотвѣтствующими значеніями $f(x)$; тогда:

$$\int_a^b \frac{\sin \alpha x}{x} f(x) dx = \int_a^b \frac{\sin \alpha x}{x} \psi(x)\, dx = \int_0^b \frac{\sin \alpha x}{x} \psi(x)\, dx - \int_0^a \frac{\sin \alpha x}{x} \psi(x)\, dx,$$

$$\text{пред.} \int_a^b \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = \text{пред.} \int_0^b \frac{\sin \alpha x}{x} \psi(x)\, dx - \text{пред.} \int_0^a \frac{\sin \alpha x}{x} \psi(x)\, dx.$$

При измѣненіи x отъ 0 до a, и отъ 0 до b, функція $\psi(x)$ измѣняется въ одну сторону; по этому каждый изъ двухъ послѣднихъ предѣловъ равенъ $\frac{\pi}{2}\psi(0)$; слѣдовательно:

$$\text{пред.} \int_a^b \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = 0.$$

Пусть теперь на пути x отъ 0 до h функція $f(x)$ измѣняется то въ одну, то въ другую сторону, а именно: отъ 0 до a въ одну сторону, отъ a до b въ другую, отъ b до c опять въ прежнюю, и т. д.

Разложимъ интегралъ $\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx$ на интегралы въ предѣлахъ 0 и a, a и b, b и c, и т. д. Интегралы въ предѣлахъ a и b, b и c, и т. д., каждый стремится къ 0; по этому:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = \text{пред.} \int_0^a \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

И такъ во всякомъ случаѣ, по какому-бы закону ни измѣнялась сплошная функція $f(x)$ на пути x отъ 0 до положительнаго h, *интегралъ* $\int_{\text{[redacted]}}^{h} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx$, *при безграничномъ возрастаніи положительнаго* α, *стремится къ* $\frac{\pi}{2} f(0)$.

473. Теперь, предполагая функцію $f(x)$ сплошною на всемъ пути x отъ отрицательнаго числа $-a$ до положительнаго b, не трудно найти предѣлъ, къ которому стремится интегралъ

$$\int_{-a}^{+b} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx,$$

когда положительное α растетъ безгранично.

Разложимъ этотъ интегралъ на два:

$$\int_{-a}^{+b} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx + \int_0^b \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^a \frac{\sin \alpha x}{x} f(-x)\, dx + \int_0^b \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx;$$

а отсюда находимъ:

$$\text{пред.} \int_{-a}^{+b} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x) dx = \text{пред.} \int_0^a \frac{\sin \alpha x}{x} f(-x) dx + \text{пред.} \int_0^b \frac{\sin \alpha x}{x} f(x) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} f(0) + \frac{\pi}{2} f(0) = \pi f(0).$$

Найдемъ еще предѣлъ интеграла $\int_{-a}^{-b} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx.$ $\quad \begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \end{pmatrix}$

$$\int_{-a}^{-b} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = \int_{a}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x} f(-x)\, dx,$$

$$\text{пред.} \int_{-a}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x} f(x)\, dx = -\text{пред.} \int_{a}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x} f(-x)\, dx = 0.$$

474. **Двойной интегралъ Фурье.** Пусть въ интегралѣ

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-a}^{+b} f(y) \cos\left[(y-x)\,z\right] dz\, dy$$

a и b положительныя числа, α и β какія угодно, и функція $f(y)$ сплошная на всемъ пути y между α и β. Выполняя интегрированіе по z, получимъ:

$$\int_{-a}^{+b} \cos\left[(y-x)\,z\right] dz = \left\{\frac{\sin\left[(y-x)\,z\right]}{y-x}\right\}_{-a}^{+b} = \frac{\sin b\,(y-x)}{y-x} + \frac{\sin a\,(y-x)}{y-x};$$

слѣдовательно:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-a}^{+b} f(y) \cos\left[(y-x)\,z\right] dz\, dy - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin b\,(y-x)}{y-x} f(y)\, dy + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin a\,(y-x)}{y-x} f(y)\, dy =$$

$$= \int_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin bt}{t} f(x+t)\, dt + \int_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin at}{t} f(x+t)\, dt.$$

Считая $\beta > \alpha$, дадимъ x значеніе между α и β; тогда предѣлы послѣднихъ интеграловъ будутъ: нижній $(\alpha - x)$ отрицательный, верхній $(\beta - x)$ положительный. Стало-быть если a и b будутъ рости безгранично, то, опираясь на n° 473, получимъ:

$$\text{пред.} \int_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin bt}{t} f(x+t)\, dt = \pi f(x).$$

$$\text{пред.} \int_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin at}{t} f(x+t)\, dt = \pi f(x).$$

Слѣдовательно:

$$\text{пред.}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-a}^{+b} f(y)\cos\Big[(y-x)z\Big]dz\,dy=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\Big[(y-x)z\Big]dz\,dy=2\pi f(x),$$

откуда:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\Big[(y-x)z\Big]dz\,dy.$$

Такъ выражается функція $f(x)$ при тѣхъ значеніяхъ x, которыя заключаются между α и β. Расширяя послѣдніе предѣлы, т. е. увеличивая β и уменьшая α, мы вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ распространять послѣднюю формулу на бо́льшее протяженіе x; если же сдѣлаемъ: $\alpha=-\infty$ и $\beta=+\infty$, то получимъ формулу:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\Big[(y-x)z\Big]dz\,dy, \qquad \begin{pmatrix}\text{Формула}\\ \text{Фурье.}\end{pmatrix}$$

которая имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній x.

Въ ней подъинтегральная функція — четная по отношенію къ z; по этому ее можно представить и подъ видомъ:

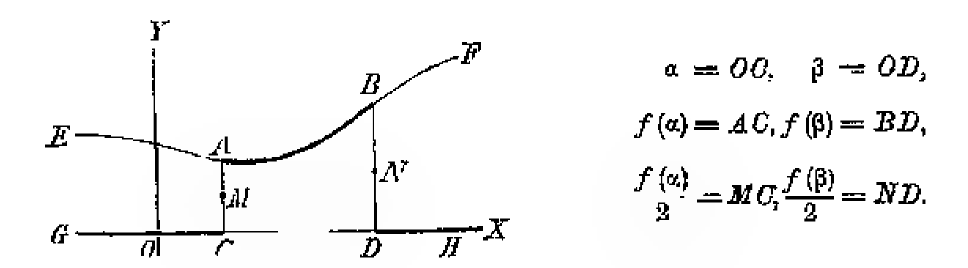
$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} f(y)\cos\Big[(y-x)z\Big]dz\,dy.$$

Интегралъ $\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\Big[(y-x)z\Big]dz\,dy$, выражая $f(x)$ при $x^{>\alpha}_{<\beta}$, обращается въ 0 при $x<\alpha$ и при $x>\beta$, въ $\frac{f(\alpha)}{2}$ при $x=\alpha$, и въ $\frac{f(\beta)}{2}$ при $x=\beta$,— въ чемъ легко убѣдимся, опираясь на n°n° 472 и 473. Стало быть линіи, соотвѣтствующія функціи $f(x)$ и послѣднему интегралу,—линіи, имѣющія уравненіями:

$$Y=f(x),\quad Y_1=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\Big[(y-x)z\Big]dz\,dy,$$

совпадаютъ на всемъ пути x между α и β; при $x=\alpha$ и при $x=\beta$,

ординаты второй, обращаясь въ $\frac{f(\alpha)}{2}$ и $\frac{f(\beta)}{2}$, отличаются отъ ординатъ первой: $f(\alpha)$ и $f(\beta)$; тутъ вторая линія разрывается, и далѣе на всемъ пути x, бо́льшаго β, и на всемъ пути x, мѐньшаго α, сливается съ осью x-овъ. Такъ, если функціи $f(x)$ соотвѣтствуетъ линія ... $EABF$ ..., которой точки A и B имѣютъ абсциссами α и β, то разсматривае-



мому интегралу соотвѣтствуютъ линіи: ... GC, AB, DH ..., за исключеніемъ въ нихъ крайнихъ точекъ C, A, B и D и замѣненіемъ ихъ точками M (середина AC) и N (середина BD).

475. Предѣлъ интеграла $\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x} f(x)dx \left(h \begin{smallmatrix} > 0 \\ < \pi \end{smallmatrix}\right)$. При сплошности $f(x)$ на всемъ пути x отъ 0 до h, произведеніе $\frac{x}{\sin x} f(x)$ будетъ также сплошною функціею на томъ же протяженіи x, если $h < \pi$. По этому, полагая h болѣе 0, но менѣе π, при безграничномъ возрастаніи положительнаго α, имѣемъ:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x} f(x)\,dx = \text{пред.} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{x}{\sin x} f(x)\right]_0 = \frac{\pi}{2} f(0) \quad *).$$

476. Предѣлъ интеграла $\int_0^\pi \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} f(x)\,dx$.

---

*) Опираясь на этотъ результатъ, получимъ:

$$\text{пред.} \int_{-a}^{+b} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} f(x)\,dx = \pi f(0), \text{ при: } a \begin{smallmatrix} > 0 \\ < \pi \end{smallmatrix}, \quad b \begin{smallmatrix} > 0 \\ < \pi \end{smallmatrix}.$$

Интегралъ $\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x} f(x)\, dx$ стремится къ произведенію $\frac{\pi}{2} f(0)$, по какому-бы закону ни возрастало α, если $h < \pi$. При $h = \pi$, а также при $h > \pi$, законъ возрастанія α имѣетъ вліяніе на предѣлъ послѣдняго интеграла. Выведемъ этотъ предѣлъ, предполагая, что α растетъ, принимая значенія цѣлыхъ нечетныхъ чиселъ, — и по этому представимъ α подъ видомъ $2n+1$. Предыдущее разсужденіе здѣсь не примѣнимо, потому что функція $\frac{x}{\sin x}$ обращается въ ∞ при $x = \pi$.

Разложимъ интегралъ $\int_0^\pi \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} f(x)\, dx$ на два, — одинъ отъ 0 до h, другой отъ h до π, считая h болѣе 0, но менѣе π:

$$\int_0^\pi \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} f(x) dx = \int_0^h \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} f(x) dx + \int_h^\pi \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} f(x) dx,$$

и второй преобразуемъ:

$$\int_h^\pi \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} f(x)\, dx = -\int_{\pi-h}^0 \frac{\sin (2n+1)(\pi-y)}{\sin (\pi-y)} f(\pi-y)\, dy =$$

$$= \int_0^{\pi-h} \frac{\sin (2n+1) y}{\sin y} f(\pi-y)\, dy.$$

Разложеніе приметъ видъ:

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x) dx = \int_0^h \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x) dx + \int_0^{\pi-h} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(\pi-x)\, dx.$$

Въ послѣднихъ двухъ интегралахъ верхніе предѣлы менѣе π; по этому:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

$$\text{пред.} \int_0^{\pi-h} \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} f(\pi-x)\, dx = \frac{\pi}{2} \Big[f(\pi-x)\Big]_0 = \frac{\pi}{2} f(\pi).$$

слѣдовательно:

$$\text{пред.} \int_0^\pi \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} f(x)\, dx = \pi \frac{f(0)+f(\pi)}{2},$$

т. е. искомый предѣлъ равенъ *произведенію* π *на среднюю ариѳметическую между двумя значеніями функціи* f, *отвѣчающими нижнему и верхнему предѣламъ интеграла.*

477. Предѣлъ интеграла $\int_0^h \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx$, **когда** $h > \pi$.

Пусть h заключаетъ въ себѣ π m разъ:

$$h = m\pi + r, \qquad \left(r \text{ или } = 0, \text{ или } {> 0 \atop < \pi}\right).$$

Разложимъ интегралъ на сумму интеграловъ въ предѣлахъ 0 и π, π и 2π, 2π и 3π, и т. д.

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)dx = \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx + \int_{m\pi}^{m\pi+r} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx.$$

Короче:

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)dx = \sum_0^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)dx + \int_{m\pi}^{m\pi+r} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx.$$

Интегралъ въ предѣлахъ $k\pi$ и $(k+1)\pi$ преобразуемъ въ другой положеніемъ $x = k\pi + y$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)(k\pi+y)}{\sin(k\pi+y)} f(k\pi+y)\,dy =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(k\pi + x)\,dx;$$

а положеніе: $x = m\pi + y$ доставитъ:

$$\int_{m\pi}^{m\pi+r} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx = \int_0^r \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(m\pi + x)\,dx;$$

слѣдовательно:

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx = \sum_0^{m-1} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(k\pi+x)\,dx + \int_0^r \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(m\pi+x)\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \sum_0^{m-1} f(k\pi+x)\,dx + \int_0^r \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(m\pi+x)\,dx.$$

Средняя ариѳметическая между значеніями $\sum_0^{m-1} f(k\pi+x)$, отвѣчающими $x=0$ и $x=\pi$, будетъ:

$$\frac{\sum_0^{m-1} f(k\pi) + \sum_0^{m-1} f\big((k+1)\pi\big)}{2} = \frac{f(0)}{2} + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f\big((m-1)\pi\big) + \frac{f(m\pi)}{2};$$

по этому:

$$\text{пред.} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \sum_0^{m-1} f(k\pi+x)\,dx =$$

$$= \pi\left[\frac{f(0)}{2} + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f\big((m-1)\pi\big) + \frac{f(m\pi)}{2}\right].$$

Слѣдовательно: если $r=0$, т. е. $h=m\pi$, то:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx = \pi\left[\frac{f(0)}{2} + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f\big((m-1)\pi\big) + \frac{f(m\pi)}{2}\right];$$

если же r не 0, то слѣдуетъ прибавить еще предѣлъ интеграла $\int_0^r \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(m\pi+x)\,dx$, который $=\frac{\pi}{2} f(m\pi)$; тогда:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx = \pi\left[\frac{f(0)}{2} + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f\big((m-1)\pi\big) + f(m\pi)\right].$$

И такъ:

$$\text{пред.} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx = \pi\left[\frac{f(0)}{2} + f(\pi)\right] \qquad \left(\text{при } h \gtrless {\pi \atop 2\pi}\right)$$

$$= \pi\left[\frac{f(0)}{2} + f(\pi) + \frac{f(2\pi)}{2}\right] \qquad \left(\text{при } h = 2\pi\right)$$

$$= \pi\left[\frac{f(0)}{2} + f(\pi) + f(2\pi)\right] \qquad \left(\text{при } h \begin{matrix} > 2\pi \\ < 3\pi \end{matrix}\right)$$

$$= \pi\left[\frac{f(0)}{2} + f(\pi) + f(2\pi) + \frac{f(3\pi)}{2}\right] \qquad \left(\text{при } h = 3\pi\right)$$

и т. д.

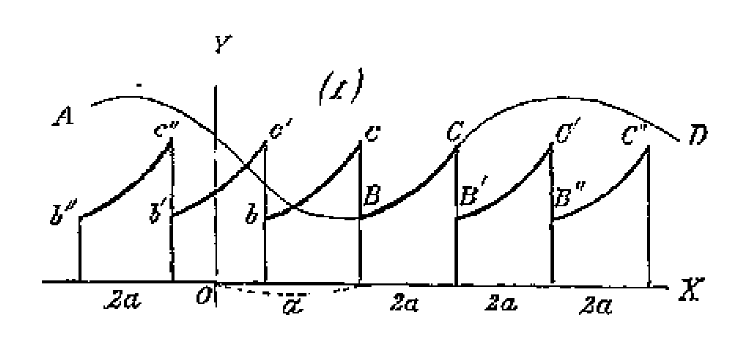
Развертываніе функцій въ тригонометрическіе ряды.

478. Всякую функцію $f(x)$, какъ увидимъ, можно развернуть въ рядъ вида:

$$A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$

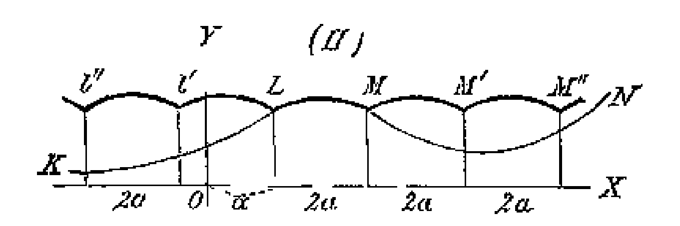
$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$

Рядъ этотъ — періодическій *) (періодъ его $2a$); по этому если онъ выражаетъ функцію $f(x)$ (которая, вообще, не періодическая), то не на всемъ протяженіи x, а на протяженія одного періода, напр. отъ $x = \alpha$ до $x = \alpha + 2a$, или, говоря геометрически: кривыя, соотвѣтствующія взятой функціи и выражающему ее ряду, совпадаютъ только отъ $x = \alpha$ до $x = \alpha + 2a$ (между точками, абсциссы которыхъ: α и $\alpha + 2a$). Такъ на чертежѣ I кривая, соотвѣтствующая нѣкоторой функціи, есть $ABCD$, а кривая, соотвѣтствующая отвѣчающей ей періодической функціи, состоитъ изъ отдѣльныхъ частей: BC, $B'C'$, $B''C''$, ..., bc, $b'c'$, $b''c''$, ..., не составляющихъ



*) Функцію $\xi(x)$, удовлетворяющую условію: $\xi(x+p) = \xi(x)$, называютъ *періодическою*, и число p — ея *періодомъ*.

одной сплошной линіи; на чертежѣ II эти кривыя: $...KLMN...$ и $...l''l'LMM'M''....$, и части LM, MM', $M'M''$,..., Ll', $l'l''$,....



послѣдней составляютъ одну сплошную линію; общая часть первыхъ кривыхъ есть BC, общая часть вторыхъ: LM.

И такъ, допуская, что на протяженіи x отъ α до $\alpha+2a$ имѣетъ мѣсто разложеніе:

$$f(x)=A_0+A_1\cos\frac{\pi x}{a}+A_2\cos\frac{2\pi x}{a}+A_3\cos\frac{3\pi x}{a}+\ldots$$

$$\ldots+B_1\sin\frac{\pi x}{a}+B_2\sin\frac{2\pi x}{a}+B_3\sin\frac{3\pi x}{a}+\ldots,$$

станемъ искать коэффиціенты: $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, B_3, \ldots$

Помножимъ обѣ части его послѣдовательно на dx, $\cos\frac{k\pi x}{a}dx$ и $\sin\frac{k\pi x}{a}dx$, и затѣмъ проинтегрируемъ между предѣлами α и $\alpha+2a$; получимъ:

$$\int_\alpha^{\alpha+2a}f(x)\,dx=A_0\int_\alpha^{\alpha+2a}dx+A_1\int_\alpha^{\alpha+2a}\cos\frac{\pi x}{a}dx+A_2\int_\alpha^{\alpha+2a}\cos\frac{2\pi x}{a}dx+\ldots$$

$$\ldots+B_1\int_\alpha^{\alpha+2a}\sin\frac{\pi x}{a}dx+B_2\int_\alpha^{\alpha+2a}\sin\frac{2\pi x}{a}dx+\ldots$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a}f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx=A_0\int_\alpha^{\alpha+2a}\cos\frac{k\pi x}{a}dx+$$

$$+A_1\int_\alpha^{\alpha+2a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{k\pi x}{a}dx+A_2\int_\alpha^{\alpha+2a}\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{k\pi x}{a}dx+\ldots$$

$$+ B_1 \int_\alpha^{\alpha+2a} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{k\pi x}{a} dx + B_2 \int_\alpha^{\alpha+2a} \sin\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{k\pi x}{a} dx + \dots$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} f(x) \sin\frac{k\pi x}{a} dx = A_0 \int_\alpha^{\alpha+2a} \sin\frac{k\pi x}{a} dx +$$

$$+ A_1 \int_\alpha^{\alpha+2a} \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{k\pi x}{a} dx + A_2 \int_\alpha^{\alpha+2a} \cos\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{k\pi x}{a} dx + \dots$$

$$+ B_1 \int_\alpha^{\alpha+2a} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{k\pi x}{a} dx + B_2 \int_\alpha^{\alpha+2a} \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{k\pi x}{a} dx + \dots$$

Въ каждой изъ вторыхъ частей этихъ трехъ равенствъ останется по одному члену; остальные уничтожатся. Дѣйствительно:

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} dx = \Big(x\Big)_\alpha^{\alpha+2a} = 2a,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} \cos\frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{m\pi}\left(\sin\frac{m\pi x}{a}\right)_\alpha^{\alpha+2a} = 0,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} \sin\frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{a}{m\pi}\left(\cos\frac{m\pi x}{a}\right)_\alpha^{\alpha+2a} = 0,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{k\pi x}{a} dx = \frac{a}{2\pi}\left[\frac{\sin\frac{(m-k)\pi x}{a}}{m-k} + \frac{\sin\frac{(m+k)\pi x}{a}}{m+k}\right]_\alpha^{\alpha+2a} = 0,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{k\pi x}{a} dx = \frac{a}{2\pi}\left[\frac{\sin\frac{(m-k)\pi x}{a}}{m-k} - \frac{\sin\frac{(m+k)\pi x}{a}}{m+k}\right]_\alpha^{\alpha+2a} = 0.$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{k\pi x}{a} dx = -\frac{a}{2\pi}\left[\frac{\cos\frac{(m-k)\pi x}{a}}{m-k} + \frac{\cos\frac{(m+k)\pi x}{a}}{m+k}\right]_\alpha^{\alpha+2a} = 0.$$

m и k различны; а въ случаяхъ $m = k$:

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} \cos^2 \frac{k\pi x}{a}\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{a}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi x}{a}\right]_\alpha^{\alpha+2a} = a\,,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} \sin^2 \frac{k\pi x}{a}\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{a}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi x}{a}\right]_\alpha^{\alpha+2a} = a\,,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} \sin \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{k\pi x}{a}\, dx = -\frac{a}{4k\pi}\left[\cos \frac{2k\pi x}{a}\right]_\alpha^{\alpha+2a} = 0.$$

И потому:

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} f(x)\, dx = A_0 \int_\alpha^{\alpha+2a} dx = 2a\, A_0\,,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} f(x) \cos \frac{k\pi x}{a}\, dx = A_k \int_\alpha^{\alpha+2a} \cos^2 \frac{k\pi x}{a}\, dx = a\, A_k\,,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} f(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx = B_k \int_\alpha^{\alpha+2a} \sin^2 \frac{k\pi x}{a}\, dx = a\, B_k\,;$$

а отсюда:

$$A_0 = \frac{1}{2a} \int_\alpha^{\alpha+2a} f(x)\, dx, \quad A_k = \frac{1}{a} \int_\alpha^{\alpha+2a} f(x) \cos \frac{k\pi x}{a}\, dx,$$

$$B_k = \frac{1}{a} \int_\alpha^{\alpha+2a} f(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx.$$

Давая k послѣдовательно значенія: 1, 2, 3, . . ., получимъ:

$$A_1 = \frac{1}{a} \int_\alpha^{\alpha+2a} f(x) \cos \frac{\pi x}{a}\, dx, \quad B_1 = \frac{1}{a} \int_\alpha^{\alpha+2a} f(x) \sin \frac{\pi x}{a}\, dx,$$

$$A_2 = \frac{1}{a} \int_\alpha^{\alpha+2a} f(x) \cos \frac{2\pi x}{a}\, dx, \quad B_2 = \frac{1}{a} \int_\alpha^{\alpha+2a} f(x) \sin \frac{2\pi x}{a}\, dx,$$

$$A_3 = \frac{1}{a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\cos\frac{3\pi x}{a}\,dx,\quad B_3 = \frac{1}{a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\sin\frac{3\pi x}{a}\,dx, \text{ и т. д.}$$

Разложеніе $f(x)$ представляется въ слѣдующемъ видѣ:

$$f(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\,dx + \frac{1}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\cos\frac{\pi x}{a}\,dx + \frac{1}{a}\cos\frac{2\pi x}{a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\cos\frac{2\pi x}{a}\,dx + \ldots$$

$$+ \frac{1}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\sin\frac{\pi x}{a}\,dx + \frac{1}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\sin\frac{2\pi x}{a}\,dx + \ldots$$

Въ случаѣ $a = \pi$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\cos x\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos x\,dx + \frac{1}{\pi}\cos 2x\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos 2x\,dx + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sin x\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin x\,dx + \frac{1}{\pi}\sin 2x\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin 2x\,dx + \ldots$$

479. Само собою разумѣется, что приведенное разложеніе функціи остается подъ сомнѣніемъ, такъ какъ при выводѣ его мы не разсматривали остаточнаго члена. Чтобы подтвердить полученный результатъ, употребимъ теперь обратный пріемъ: докажемъ, что приведенное разложеніе представляетъ $f(x)$ для всякаго значенія x, взятаго между α и $\alpha + 2a$; другими словами: сумма

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\,dx + \frac{1}{a}\sum_{1}^{n}\left[\cos\frac{k\pi x}{a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx + \sin\frac{k\pi x}{a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a} f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx\right],$$

съ возрастаніемъ n, стремится къ $f(x)$, если x заключается между α и $\alpha + 2a$.

Обозначимъ эту сумму чрезъ T и преобразуемъ ее:

$$T = \frac{1}{a}\left\{\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a}\frac{1}{2}f(z)\,dz + \sum_{1}^{n}\left[\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a}\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{k\pi z}{a}f(z)\,dz + \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{k\pi z}{a}f(z)\,dz\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{a}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2a}\left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{k\pi z}{a} + \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{k\pi z}{a}\right)\right]f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\alpha+2a}\left[\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos\frac{k\pi(z-x)}{a}\right]f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{\alpha}^{\alpha+2a}\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi(z-x)}{2a}\right]}{\sin\frac{\pi(z-x)}{2a}}f(z)\,dz \quad *).$$

Положимъ: $\frac{\pi(z-x)}{2a}=t$; тогда: $z=x+\frac{2a}{\pi}t$, $dz=\frac{2a}{\pi}dt$, — и потому:

$$\mathrm{T}=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi(x-\alpha)}{2a}}^{\pi-\frac{\pi(x-\alpha)}{2a}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}f\left(x+\frac{2a}{\pi}t\right)dt.$$

Считая x болѣе α, но менѣе $\alpha+2a$, имѣемъ: $\frac{\pi(x-\alpha)}{2a}\begin{matrix}>0\\<\pi\end{matrix}$; поэтому нижній предѣлъ послѣдняго интеграла отрицательный, верхній положительный, а по абсолютной величинѣ каждый менѣе π; слѣдовательно, опираясь на n° 475, находимъ:

$$\text{пред. }\mathrm{T}=\frac{1}{\pi}\cdot\pi\left[f\left(x+\frac{2a}{\pi}t\right)\right]_{t=0}=f(x).$$

Это — при $x\begin{matrix}>\alpha\\<\alpha+2a\end{matrix}$; а при $x=\alpha$, имѣя:

$$\mathrm{T}_{\alpha}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}f\left(\alpha+\frac{2a}{\pi}t\right)dt,$$

---

*) $\left(\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos ky\right)\sin y=\frac{\sin y}{2}+\sum_{1}^{n}\sin y\cos ky=\frac{\sin y}{2}+\sum_{1}^{n}\frac{\sin(k+1)y-\sin(k-1)y}{2}$

$$=\frac{\sin(n+1)y+\sin ny}{2}=\sin\frac{(2n+1)y}{2}\cos\frac{y}{2},$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos ky=\frac{\sin\frac{(2n+1)y}{2}\cos\frac{y}{2}}{\sin y}=\frac{\sin\frac{(2n+1)y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}}.$$

и опираясь на n° 476, нашли-бы:

$$\text{пред. } \mathrm{T}_\alpha = \frac{f(\alpha) + f(\alpha + 2a)}{2};$$

затѣмъ при $x = \alpha + 2a$:

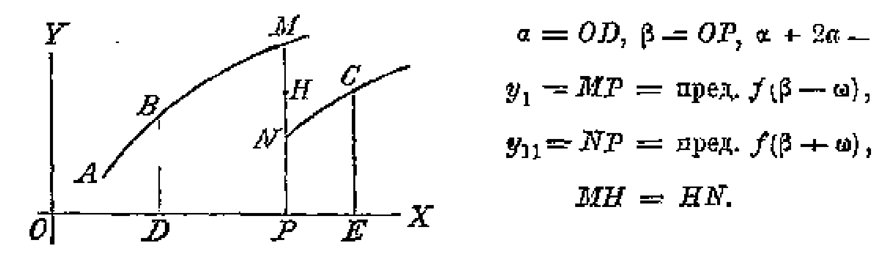
$$\mathrm{T}_{\alpha+2a} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} f\left(\alpha + 2a + \frac{2a}{\pi}t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} f\left(\alpha + 2a - \frac{2a}{\pi}t\right) dt,$$

$$\text{пред. } \mathrm{T}_{\alpha+2a} = \frac{f(\alpha+2a) + f(\alpha)}{2}.$$

Итакъ приведенный выше тригонометрическій рядъ даетъ $f(x)$ при всякомъ x, взятомъ между α и $\alpha + 2a$, а при $x = \alpha$ и при $x = \alpha + 2a$ онъ не даетъ значеній $f(\alpha)$ и $f(\alpha + 2a)$, а въ обоихъ случаяхъ — среднее ариѳметическое между ними. Для значеній x, заключающихся внѣ границъ α и $\alpha + 2a$, т. е. для $x < \alpha$ и для $x > \alpha + 2a$, этотъ рядъ, по своей періодичности, будетъ давать періодически повторяющіяся значенія — тѣже, какія и для x въ границахъ α и $\alpha + 2a$.

Пусть теперь на пути x отъ α до $\alpha + 2a$, при $x = \beta = OP$, функція $f(x)$ разрывается, переходя отъ y_1 (MP) къ y_{11} (NP) — такъ что съ приближеніемъ x къ β, функція подходитъ или къ y_1, или къ y_{11}, смотря потому, подходитъ-ли x къ β увеличиваясь, или



$\alpha = OD$, $\beta = OP$, $\alpha + 2a = OE$,
$y_1 = MP = \text{пред. } f(\beta - \omega)$,
$y_{11} = NP = \text{пред. } f(\beta + \omega)$,
$MH = HN$.

уменьшаясь. Тогда, разлагая интегралъ T на два, одинъ отъ его нижняго (отрицательнаго) предѣла до 0, другой отъ 0 до верхняго (положительнаго), и преобразовывая первый, при $x = \beta$ получимъ:

$$T_\beta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi(\beta-\alpha)}{2a}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} f\left(\beta - \frac{2a}{\pi}t\right)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi - \frac{\pi(\beta-\alpha)}{2a}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} f\left(\beta + \frac{2a}{\pi}t\right)dt,$$

$$\text{пред. } T_\beta = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}y_1 + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}y_{11} = \frac{y_1+y_{11}}{2} = HP.$$

Стало-быть при $x=\beta$ тригонометрическій рядъ даетъ среднюю ариѳметическую между y_1 и y_{11}.

480. Сдѣлаемъ: $a=\pi$, $\alpha=-\pi$; тогда разложеніе функціи приметъ видъ:

$$f(x) = A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + B_1\sin x + B_2\sin 2x + B_3\sin 3x + \ldots\ldots,$$

и коэффиціенты найдутся по формуламъ:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx,\quad A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

При этомъ приведенный рядъ выразитъ $f(x)$ для всякаго значенія x, заключающагося между $-\pi$ и $+\pi$; а при $x=-\pi$ и при $x=\pi$ онъ дастъ среднюю ариѳметическую между $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ т. е. $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$.

481. Если, на пути x отъ α до $\alpha+2a$, функція $f(x)$ разрывается одинъ или нѣсколько разъ, и разрывъ этотъ состоитъ въ переходѣ функціи отъ однихъ дѣйствій, ее характеризующихъ, въ другія, то во всякомъ случаѣ можно найти тригонометрическій рядъ, ее выражающій. Такъ, одинъ и тотъже рядъ

$$A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin\frac{2\pi x}{a} + \ldots$$

дастъ значенія функціи $\varphi(x)$ на пути x отъ α до β, затѣмъ значенія функціи $\psi(x)$ на пути x отъ β до γ, и значенія $\xi(x)$ на пути x отъ

γ до $\alpha+2a$ $(\alpha<\beta<\gamma<\alpha+2a)$, когда коэффиціенты его слѣдующіе:

$$A_0=\frac{1}{2a}\left[\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx+\int_\beta^\gamma \psi(x)\,dx+\int_\gamma^{\alpha+2a}\xi(x)\,dx\right] \quad *)$$

$$A_k=\frac{1}{a}\left[\int_\alpha^\beta \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx+\int_\beta^\gamma \psi(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx+\int_\gamma^{\alpha+2a}\xi(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx\right]$$

$$B_k=\frac{1}{a}\left[\int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx+\int_\beta^\gamma \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx+\int_\gamma^{\alpha+2a}\xi(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx\right].$$

482. *Примѣры:*

а) Пусть: $f(x)=x$, $\alpha=-\pi$, $a=\pi$; тогда:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,dx=0\,,\quad A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\cos kx\,dx=0\,,$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx=-\frac{2\cos k\pi}{k}=(-1)^{k-1}\cdot\frac{2}{k}\,;$$

стало-быть:

$$A_0=0,\ A_1=0,\ A_2=0,\ A_3=0,\ A_4=0,\ldots.$$

---

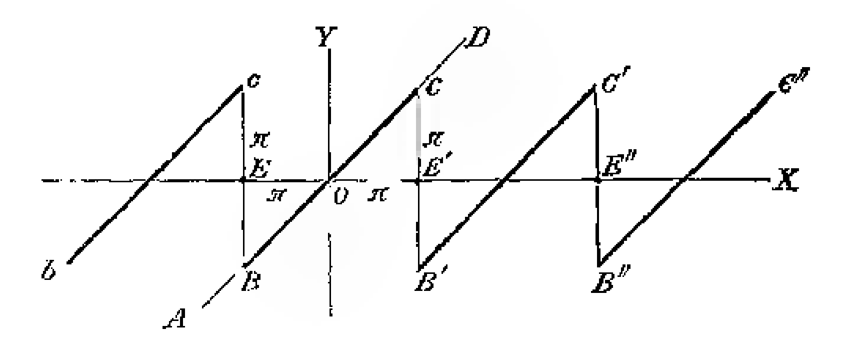
*) $\int_\alpha^{\alpha+2a} f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\gamma f(x)\,dx+\int_\gamma^{\alpha+2a} f(x)\,dx$; а такъ какъ функція f обращается въ φ при $x \gtrless {\alpha \atop \beta}$, въ ψ при $x \gtrless {\beta \atop \gamma}$, и въ ξ при $x \gtrless {\gamma \atop \alpha+2a}$, то:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\,,\quad \int_\beta^\gamma f(x)\,dx=\int_\beta^\gamma \psi(x)\,dx,\quad \int_\gamma^{\alpha+2a} f(x)\,dx=\int_\gamma^{\alpha+2a}\xi(x)\,dx\,;$$

и потому:

$$\int_\alpha^{\alpha+2a} f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx+\int_\beta^\gamma \psi(x)dx+\int_\gamma^{\alpha+2a}\xi(x)dx.$$

$$B_1 = \frac{2}{1},\ B_2 = -\frac{2}{2},\ B_3 = \frac{2}{3},\ B_4 = -\frac{2}{4},\ldots.$$



Итакъ при $x \begin{matrix} > -\pi \\ < \pi \end{matrix}$ имѣемъ:

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \ldots\right], \quad (1)$$

а при $x = -\pi$ и при $x = \pi$ вторая часть (1) дастъ среднюю ариѳметическую между $-\pi$ и π, т. е. 0.

Здѣсь взятой функціи, т. е. x, соотвѣтствуетъ прямая AD, проходящая чрезъ начало координатъ и составляющая съ осью OX уголъ въ 45^0, а отвѣчающему ей тригонометрическому ряду — часть BC этой прямой и параллельныя ей прямыя: ..., bc, $B'C'$, $B''C''$, ... за исключеніемъ въ нихъ крайнихъ точекъ и съ присоединеніемъ вмѣсто нихъ точекъ: ..., $E(-\pi, 0)$, $E'(\pi, 0)$, $E''(3\pi, 0)$, ...

Замѣнимъ въ (1) x разностью $\pi - x$; получимъ:

$$\pi - x = 2\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right]. \quad (2)$$

Въ (2) $\pi - x \begin{matrix} > -\pi \\ < \pi \end{matrix}$; поэтому: $x \begin{matrix} > 0 \\ < 2\pi \end{matrix}$.

Сложимъ (1) и (2); тогда:

$$\pi = 4\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{3} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right]. \quad (3)$$

Такъ какъ въ (1): $x \begin{matrix} > -\pi \\ < \pi \end{matrix}$, въ (2): $x \begin{matrix} > 0 \\ < 2\pi \end{matrix}$, то въ (3): $x \begin{matrix} > 0 \\ < \pi \end{matrix}$.

Стало-быть вторая часть (3) при всякомъ значеніи x, взятомъ между 0 и π, даетъ постоянное число π.

b) Пусть: $f(x) = -x$ при $x \gtrless {-\pi \atop 0}$, $f(x) = x$ при $x \gtrless {0 \atop \pi}$; короче: $f(x) = \sqrt{x^2}$ при $x \gtrless {-\pi \atop \pi}$; тогда:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sqrt{x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sqrt{x^2}\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos k\pi - 1}{k^2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2},$$

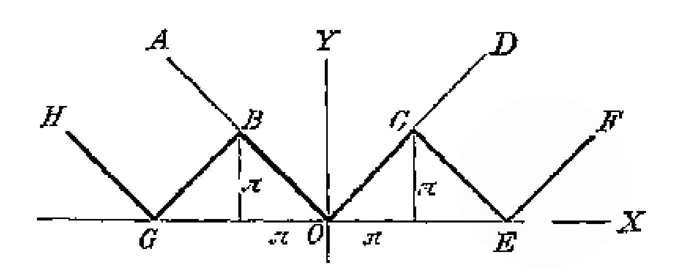
$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sqrt{x^2}\sin kx\,dx = 0.$$

$$A_1 = -\frac{4}{\pi},\ A_2 = 0,\ A_3 = -\frac{4}{2\pi},\ A_4 = 0,\ A_5 = -\frac{4}{25\pi}, \ldots$$

Слѣдовательно:

$$\sqrt{x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \ldots\right]. \qquad (4).$$

Эта формула, имѣя мѣсто при $x \gtrless {-\pi \atop \pi}$, годится и при $x = -\pi$, и при $x = \pi$, — потому что функція $\sqrt{x^2}$ при двухъ послѣднихъ значеніяхъ x принимаетъ одно и тоже значеніе π, — стало-быть и среднее ариѳметическое между ними будетъ тоже.



Функціи $\sqrt{x^2}$ соотвѣтствуетъ линія ... AOD ..., а отвѣчающему этой функціи тригонометрическому ряду — ломанная ... $HGBOCEF$ .... Общая часть этихъ линій: BOC.

Полагая въ (4): $x = 0$, получимъ:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots\right), \text{ откуда:}$$

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

c) $f(x)=x^2$, $\alpha=-\pi$, $a=\pi$.

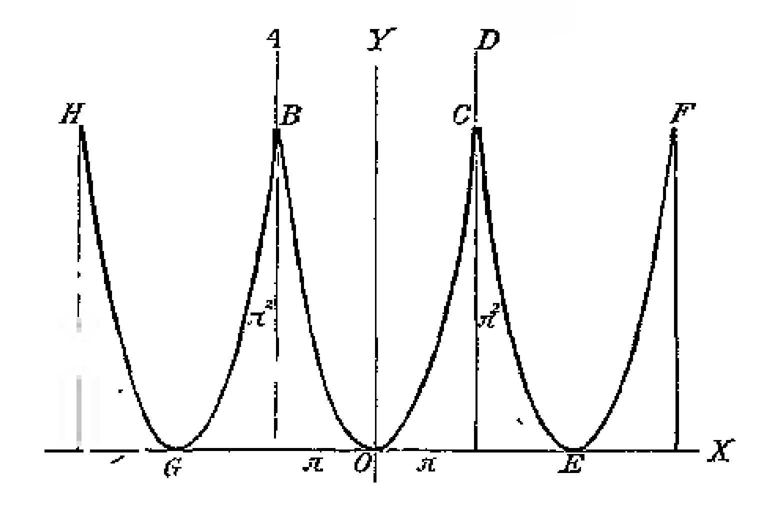
$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{\pi^2}{3},$$

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx\,dx=\frac{4}{k^2}\cos k\pi=(-1)^k\cdot\frac{4}{k^2},$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2\sin kx\,dx=0.$$

Стало-быть на протяженіи x отъ $-\pi$ до $+\pi$ (не исключая и крайнихъ значеній $-\pi$ и $+\pi$) имѣемъ:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{4}+\frac{\cos 3x}{9}-\frac{\cos 4x}{16}+\frac{\cos 5x}{25}\ldots\right] \quad (5).$$



Функціи x^2 соотвѣтствуетъ парабола . . . $ABOCD$ . . . , а отвѣчающему ей тригонометрическому ряду линія . . . $HGBOCEF$ . . . , состоящая изъ частей . . . , HGB, BOC, CEF, . . . , равныхъ части BOC параболы. BOC общая часть.

При $x=0$ получимъ:

$$0=\frac{\pi^2}{3}-4\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\ldots\right],\text{ откуда:}$$

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\ldots=\frac{\pi^2}{12} \qquad (6).$$

При $x=\pi$:

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\right],$$ откуда:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\ldots=\frac{\pi^2}{6} \qquad (7).$$

А изъ (6) и (7) находимъ:

$$1+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{7}\right)^2+\ldots=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\ldots=\frac{\pi^2}{24}.$$

d) Пусть $\alpha=-\pi$, $a=\pi$, $f(x)=0$ при $x \begin{smallmatrix}>-\pi\\<\;0\end{smallmatrix}$, $f(x)=\cos x$ при $x \begin{smallmatrix}>0\\<\pi\end{smallmatrix}$; тогда:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos x\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos x\,dx=0,$$

$$A_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2},$$

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\cos kx\,dx=0 \quad (k>1);$$

$$B_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,\sin x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\sin x\,dx=0,$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\sin kx\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-\cos(k+1)\pi}{k+1}+\frac{1-\cos(k-1)\pi}{k-1}\right] \quad (k>1).$$

$B_k=0$, при k нечетномъ;

$$B_k=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k-1}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k}{(k-1)(k+1)},$$ при k четномъ.

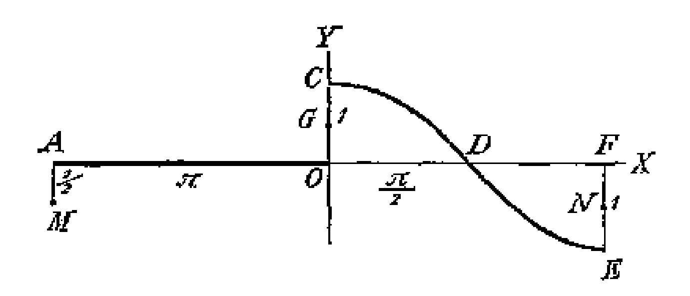
И такъ: $A_0=0,\ A_1=\frac{1}{2},\ A_2=0,\ A_3=0,\ A_4=0,\ A_5=0,\dots$

$$B_1=0,\ B_2=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1.3},\ B_3=0,\ B_4=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{4}{3.5},\ B_5=0,\dots$$

Слѣдовательно сумма:

$$\frac{\cos x}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{2\sin 2x}{1.3}+\frac{4\sin 4x}{3.5}+\frac{6\sin 6x}{5.7}+\frac{8\sin 8x}{7.9}+\dots\right]$$

обращается въ 0 при всякомъ значеніи x между $-\pi$ и 0, и выражаетъ $\cos x$, когда x заключается между 0 и π. При $x=-\pi$ и при $x=\pi$ она даетъ среднюю ариѳметическую между 0 и -1, т. е. $-\frac{1}{2}$, а при $x=0$ среднюю ариѳметическую между 0 и 1, т. е. $\frac{1}{2}$.



При измѣненіи x между $-\pi$ и $+\pi$, этой суммѣ соотвѣтствуютъ линіи AO (прямая) и CDE (кривая косинусовъ), первая на пути x отъ $-\pi$ до 0, а вторая отъ 0 до π, — за исключеніемъ въ нихъ крайнихъ точекъ, которыя слѣдуетъ замѣнить точками $M\left(-\pi,-\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\pi,-\frac{1}{2}\right)$ и $G\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Подставляя $\frac{\pi}{4}$ на мѣсто x, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{1.3}-\frac{6}{5.7}+\frac{10}{9.11}-\frac{14}{13.15}+\dots\right],\text{ откуда:}$$

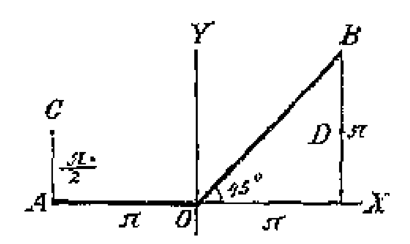
$$\frac{1}{1.3}-\frac{3}{5.7}+\frac{5}{9.11}-\frac{7}{13.15}+\dots=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

e) $a=-\pi$, $a=\pi$, $f(x)=0$ при $x\gtrless{-\pi \atop 0}$, $f(x)=x$ при $x\gtrless{0 \atop \pi}$.

$$A_0=\frac{\pi}{4},\ A_k=\frac{(-1)^k-1}{k^2\pi};\ B_k=\frac{(-1)^{k-1}}{k};$$

$$A_1=-\frac{2}{\pi},\ A_2=0,\ A_3=-\frac{2}{9\pi},\ A_4=0,\ A_5=-\frac{2}{25\pi},\ \ldots.$$

$$B_1=1,\ B_2=-\frac{1}{2},\ B_3=\frac{1}{3},\ B_4=-\frac{1}{4},\ B_5=\frac{1}{5},\ \ldots.$$



Сумма:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left[\cos+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}+\frac{\cos 7x}{49}+\ldots\right]+$$

$$+\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots.$$

дастъ 0 при $x \gtrless {-\pi \atop 0}$ и при $x=0$, x при $x \gtrless {0 \atop \pi}$, $\frac{\pi}{2}$ при $x=\pi$ и при $x=-\pi$.

На протяженіи x отъ $-\pi$ до $+\pi$ ей соотвѣтствуетъ линія AOB, кромѣ крайнихъ точекъ A и B, которыя замѣняются точками: $C\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ и $D\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

f) $\alpha=-\pi$, $a=\pi$, $f(x)=-x$ при $x \gtrless {-\pi \atop 0}$, $f(x)=\sin x$ при $x \gtrless {0 \atop \pi}$.

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x\,dx)+\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right]=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+2\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi},$$

$$A_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x\cos kx\,dx)+\int_0^{\pi}\sin x\cos kx\,dx\right]=$$

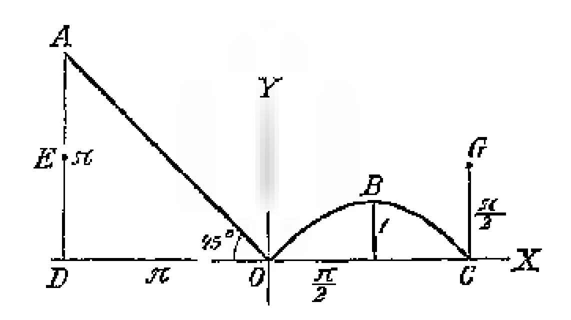
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}x\cos kx\,dx+\int_0^{\pi}\sin x\cos kx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^k-1}{k^2}+\frac{(-1)^{k-1}-1}{(k-1)(k+1)}\right]\qquad(k>1),$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi x\cos x\,dx + \int_0^\pi \sin x\cos x\,dx\right] = -\frac{2}{\pi};$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^0 x\sin kx\,dx + \int_0^\pi \sin x\sin kx\,dx\right] = \frac{(-1)^k}{k}\ (k > 1);$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^\pi x\sin x\,dx + \int_0^\pi \sin^2 x\,dx\right] = -\frac{1}{2}.$$



Сумма:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 3x}{3.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 5x}{5.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} + \ldots\right]$$

$$-\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{3} - \ldots$$

выражаетъ $-x$ при $x \gtrless {-\pi \atop 0}$, $\sin x$ при $x \gtrless {0 \atop \pi}$, 0 при $x = 0$, $\frac{\pi}{2}$ при $x = \pi$ и при $x = -\pi$. Ей, на пути x между $-\pi$ и $+\pi$, соотвѣтствуетъ линія $A\ O\ B\ O$ (часть которой AO — прямая, а часть $O\ B\ C$ — кривая синусовъ), за исключеніемъ точекъ $A\ (-\pi, \pi)$ и $O\ (\pi, 0)$ и замѣненіемъ ихъ точками: $E\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ и $G\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

Измѣненіе порядка интегрированія функціи въ случаѣ ея разрыва.

483. Если функція $f(x, y)$ — сплошная на всемъ протяженіи x отъ x_0 до X, и y отъ y_0 до Y, то, какъ видѣли выше, интегралы

$$\int_{x_0}^{X}\left[dx\int_{y_0}^{Y}f(x,y)\,dy\right] \text{ и } \int_{y_0}^{Y}\left[dy\int_{x_0}^{X}f(x,y)\,dx\right],$$

разнящіеся порядкомъ интегрированія, равны между собою.

Пусть теперь между предѣлами интегрированія функція $f(x, y)$ разрывается, обращаясь въ ∞. Въ такомъ случаѣ, вообще говоря, порядокъ интегрированія имѣетъ вліяніе на результатъ, и стало-быть разсматриваемые интегралы, вообще говоря, не равны. Найдемъ разность между ними. Допустимъ сначала одинъ разрывъ, при $x = \alpha$ и $y = \beta$, такъ что: $f(\alpha, \beta) = \infty$, — при чемъ: $x_0 < \alpha < X$, $y_0 < \beta < Y$.

Разсмотримъ сумму:

$$\int_{x_0}^{\alpha-\omega}\left[dx\int_{y_0}^{Y}f(x,y)\,dy\right] + \int_{\alpha+\varepsilon}^{X}\left[dx\int_{y_0}^{Y}f(x,y)\,dy\right] \qquad \begin{pmatrix}\omega > 0\\ \varepsilon > 0\end{pmatrix}.$$

Въ членахъ ея подъинтегральная функція остается сплошною между предѣлами интегрированій, — потому что хотя β и заключается между y_0 и Y, но функція $f(x, y)$ при $y = \beta$ тогда только разрывается, когда при этомъ x получаетъ значеніе α; въ предѣлахъ же x_0 и $\alpha - \omega$, также $\alpha + \varepsilon$ и X, количество α не заключается По этому въ послѣднихъ интегралахъ порядокъ интегрированій можетъ быть измѣненъ. Измѣняя его и въ томъ и другомъ интегралѣ, получимъ:

$$\int_{x_0}^{\alpha-\omega}\left[dx\int_{y_0}^{Y}f(x,y)\,dy\right] + \int_{\alpha+\varepsilon}^{X}\left[dx\int_{y_0}^{Y}f(x,y)\,dy\right] =$$

$$= \int_{y_0}^{Y}\left[dy\int_{x_0}^{\alpha-\omega}f(x,y)\,dx\right] + \int_{y_0}^{Y}\left[dy\int_{\alpha+\varepsilon}^{X}f(x,y)\,dx\right]$$

$$= \int_{y_0}^{Y}\left\{\int_{x_0}^{\alpha-\omega}f(x,y)\,dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^{X}f(x,y)\,dx\right\}dy.$$

Пусть:

$$\int f(x,y)\,dx = \varphi(x,y) + \varphi_1(y),$$
$$\int f(x,y)\,dy = \xi(x,y) + \xi_1(x);$$

(φ_1 и ξ_1 произвольныя функціи)

тогда:

$$\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy = \xi(x,Y) - \xi(x,y_0),$$

$$\int_{x_0}^{\alpha-\omega} f(x,y)\,dx = \varphi(\alpha-\omega,y) - \varphi(x_0,y),$$

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{X} f(x,y)\,dx = \varphi(X,y) - \varphi(\alpha+\varepsilon,y);$$

слѣдовательно:

$$\int_{x_0}^{\alpha-\omega}\Big[\xi(x,Y) - \xi(x,y_0)\Big]dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^{X}\Big[\xi(x,Y) - \xi(x,y_0)\Big]dx =$$

$$= \int_{y_0}^{Y}\Big[\varphi(X,y) - \varphi(x_0,y) - \varphi(\alpha+\varepsilon,y) + \varphi(\alpha-\omega,y)\Big]dy,$$

или:

$$\int_{x_0}^{X}\Big[\xi(x,Y) - \xi(x,y_0)\Big]dx - \int_{\alpha-\omega}^{\alpha+\varepsilon}\Big[\xi(x,Y) - \xi(x,y_0)\Big]dx =$$

$$= \int_{y_0}^{Y}\Big[\varphi(X,y) - \varphi(x_0,y)\Big]dy - \int_{y_0}^{Y}\Big[\varphi(\alpha+\varepsilon,y) - \varphi(\alpha-\omega,y)\Big]dy.$$

Мы допускаемъ разрывъ функцій φ и ξ, какъ и f, только при $x=\alpha$, $y=\beta$; стало-быть разность $\xi(x,Y) - \xi(x,y_0)$ представляетъ функцію сплошную на всемъ пути x между $\alpha - \omega$ и $\alpha+\varepsilon$, и потому:

$$\int_{\alpha-\omega}^{\alpha+\varepsilon}\Big[\xi(x,Y) - \xi(x,y_0)\Big]dx = (\omega+\varepsilon)\Big[\xi(x_1,Y) - \xi(x_1,y_0)\Big],$$

гдѣ x_1 — количество среднее между $\alpha-\omega$ и $\alpha+\varepsilon$.

По этому, замѣняя вмѣстѣ съ тѣмъ интегралы

$$\int_{x_0}^{X}\Big[\xi(x, Y)-\xi(x, y_0)\Big]dx \text{ и } \int_{y_0}^{Y}\Big[\varphi(X, y)-\varphi(x_0, y)\Big]dy$$

равными имъ двойными интегралами, получимъ:

$$\int_{x_0}^{X}\Big[dx\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy\Big]-(\omega+\varepsilon)\Big[\xi(x_1, Y)-\xi(x_1, y_0)\Big]=$$

$$=\int_{y_0}^{Y}\Big[dy\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx\Big]-\int_{y_0}^{Y}\Big[\varphi(\alpha+\varepsilon, y)-\varphi(\alpha-\omega, y)\Big]dy.$$

Съ приближеніемъ ω и ε къ 0, сумма $\omega+\varepsilon$ подходитъ къ 0, а разность $\xi(x_1, Y)-\xi(x_1, y_0)$ къ $\xi(\alpha, Y)-\xi(\alpha, y_0)$, —стало-быть второй членъ лѣвой части стремится къ 0; но того же нельзя сказать относительно втораго члена правой части, — потому что функція $\varphi(x, y)$ разрывается при переходѣ y чрезъ β, когда при этомъ x принимаетъ значеніе α. Поэтому сравненіе предѣловъ лѣвой и правой части (когда ω и ε подходятъ къ 0) приводитъ къ формулѣ:

$$\int_{x_0}^{X}\Big[dx\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy\Big]=\int_{y_0}^{Y}\Big[dy\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx\Big]-$$

$$-\text{ пр.}\int_{y_0}^{Y}\Big[\varphi(\alpha+\varepsilon, y)-\varphi(\alpha-\omega, y)\Big]dy.$$

Если функція $f(x, y)$ на протяженіи x отъ x_0 до X и y отъ y_0 до Y разрывается нѣсколько разъ, при $x=\alpha$, $y=\beta$, при $x=\alpha_1$, $y=\beta_1$, при $x=\alpha_{11}$, $y=\beta_{11}$, и т. д., то:

$$\int_{x_0}^{X}\Big[dx\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy\Big]=\int_{y_0}^{Y}\Big[dy\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx\Big]-$$

$$-\text{ пр.}\int_{y_0}^{Y}\Big[\varphi(\alpha+\varepsilon, y)-\varphi(\alpha-\omega, y)\Big]dy$$

$$-\text{ пр.}\int_{y_0}^{Y}\Big[\varphi(\alpha_1+\varepsilon_1, y)-\varphi(\alpha_1-\omega_1, y)\Big]dy-$$

$$-\text{ пр.}\int_{y_0}^{Y}\Big[\varphi(\alpha_{11}+\varepsilon_{11}, y)-\varphi(\alpha_{11}-\omega_{11}, y)\Big]dy-\ldots..$$

Формулу эту можно примѣнить къ выводу многихъ опредѣленныхъ интеграловъ.

484. Повѣримъ ее на двойномъ интегралѣ:

$$\int_{-1}^{+1}\left[dx\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right].$$

Въ немъ подъинтегральная функція на протяженіи x и y отъ -1 до $+1$ разрывается одинъ разъ, при $x=0$, $y=0$ (при $x=0$ она обращается въ $-\frac{1}{y^2}$, а послѣдняя дробь при $y=0$ въ $-\infty$; обратно, если положить сперва $y=0$, то функція, обращаясь въ $\frac{1}{x^2}$, при $x=0$ даетъ $+\infty$). Стало-быть здѣсь $\alpha=0$, $\beta=0$; а такъ какъ:

$$\int\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=-\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi_1(y),\qquad \left(\begin{matrix}\varphi_1 \text{ произволь-}\\ \text{ная функція}\end{matrix}\right)$$

то:

$$\varphi(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\varphi(\alpha+\varepsilon,y)-\varphi(\alpha-\omega,y)=\varphi(\varepsilon,y)-\varphi(-\omega,y)=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}-\frac{\omega}{\omega^2+y^2},$$

$$\int_{-1}^{+1}\left[dx\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right]-\int_{-1}^{+1}\left[dy\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right]=$$

$$=\text{пр.}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}+\frac{\omega}{\omega^2+y^2}\right)dy.$$

Выполнимъ интегрированія:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)_{-1}^{1}=\frac{2}{x^2+1},$$

$$\int_{-1}^{+1}\left[dx\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right]=2\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2+1}=4\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\pi;$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\left[-\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{-1}^{1}=-\frac{2}{1+y^2},$$

$$\int_{-1}^{+1}\left[dy\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right]=-2\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{1+y^2}=-4\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=-\pi;$$

разность двойныхъ интеграловъ $=\pi-(-\pi)=2\pi$.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}dy=\int_{-1}^{+1}\frac{d\frac{y}{\varepsilon}}{1+\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^2}=\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\varepsilon}\right)_{-1}^{1}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}+\frac{\omega}{\omega^2+y^2}\right)dy=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varepsilon}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\omega},$$

$$\text{пр.}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}+\frac{\omega}{\omega^2+y^2}\right)dy=2\ \text{пр.}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varepsilon}+2\ \text{пр.}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\omega}=2\pi.$$

Кратные интегралы, разсматриваемые какъ предѣлы суммъ.

485. **Двойной интегралъ** $\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}f(x,y)\,dy\,dx$, **подобно одиночному, можно разсматривать какъ предѣлъ, къ которому стремится сумма значеній** $f(x,y)\,\Delta y\,\Delta x$ **при измѣненіяхъ** x **отъ** x_0 **до** X **и** y **отъ** y_0 **до** Y. Возьмемъ между y_0 и Y промежуточныя величины: y_1, y_2, y_3, ..., y_{n-1}, и разности: y_1-y_0, y_2-y_1, y_3-y_2, ..., $Y-y_{n-1}$ обозначимъ соотвѣтственно чрезъ: Δy_0, Δy_1, Δy_2, ..., Δy_{n-1} *); тогда, опираясь на n° 373, имѣемъ:

$$\int_{y_0}^{Y}f(x,y)dy=\text{пред.}\left[f(x,y_0)\Delta y_0+f(x,y_1)\Delta y_1+f(x,y_2)\Delta y_2+\ldots+f(x,y_{n-1})\Delta y_{n-1}\right],$$

или короче:

$$\int_{y_0}^{Y}f(x,y)\,dy=\text{пред.}\sum_{y_0}^{Y}f(x,y)\,\Delta y.$$

---

*) Эти разности однозначны, потому что $y_0<y_1<y_2<\ldots<y_{n-1}<Y$, если $Y>y_0$, и $y_0>y_1>y_2>\ldots>y_{n-1}>Y$, если $Y<y_0$; въ первомъ случаѣ онѣ положительныя, во второмъ—отрицательныя.

Если обозначимъ разность между суммою $\sum_{y_0}^{Y} f(x, y)\,\Delta y$ и ея предѣломъ $\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy$ чрезъ ω, то:

$$\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy = \sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\,\Delta y - \omega.$$

(ω стремится къ 0 вмѣстѣ съ Δy, т. е. вмѣстѣ съ каждымъ изъ приращеній: $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_{n-1}$).
Слѣдовательно:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x_0}^{X}\left\{\sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\,\Delta y\right\}dx - \int_{x_0}^{X}\omega\,dx$$

$$= \sum_{y_0}^{Y}\left[\Delta y\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx\right] - \int_{x_0}^{X}\omega\,dx.$$

Обозначимъ теперь разность между суммою

$$f(x_0, y)\,\Delta x_0 + f(x_1, y)\,\Delta x_1, + f(x_2, y)\,\Delta x_2 + \ldots + f(x_{m-1}, y)\,\Delta x_{m-1}$$

(въ которой $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_{m-1}$ — однозначныя разности: $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, X \quad x_{m-1}$) и ея предѣломъ $\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx$ чрезъ ε; тогда:

$$\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx = \sum_{x_0}^{X} f(x,y)\,\Delta x - \varepsilon$$

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx = \sum_{y_0}^{Y}\left\{\left[\sum_{x_0}^{X} f(x,y)\,\Delta x - \varepsilon\right]\Delta y\right\} - \int_{x_0}^{X}\omega\,dx$$

$$= \sum_{y_0}^{Y}\sum_{x_0}^{X} f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y - \sum_{y_0}^{Y}\varepsilon\,\Delta y - \int_{x_0}^{X}\omega\,dx.$$

Количества ω и ε стремятся къ 0, первое вмѣстѣ съ Δy, второе

вмѣстѣ съ Δx; по этому и каждый изъ двухъ послѣднихъ членовъ также подходитъ къ 0 *); слѣдовательно:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx = \text{пред.} \sum_{y_0}^{Y}\sum_{x_0}^{X} f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Въ суммѣ $\sum_{y_0}^{Y} \sum_{x_0}^{X} f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y$ число членовъ, которыхъ счетомъ mn, растетъ безгранично съ приближеніемъ Δx и Δy къ 0. Если выписать эти члены отдѣльно, то она приметъ слѣдующій видъ:

$$f(x_0,y_0)\Delta x_0\Delta y_0 + f(x_1,y_0)\Delta x_1\Delta y_0 + \ldots + f(x_{m-1},y_0)\Delta x_{m-1}\Delta y_0 +$$

$$+ f(x_0,y_1)\Delta x_0\Delta y_1 + f(x_1,y_1)\Delta x_1\Delta y_1 + \ldots + f(x_{m-1},y_1)\Delta x_{m-1}\Delta y_1 +$$

$$+ f(x_0,y_2)\Delta x_0\Delta y_2 + f(x_1,y_2)\Delta x_1\Delta y_2 + \ldots + f(x_{m-1},y_2)\Delta x_{m-1}\Delta y_2 +$$

. . . .

. . . .

$$+ f(x_0,y_{n-1})\Delta x_0\Delta y_{n-1} + f(x_1,y_{n-1})\Delta x_1\Delta y_{n-1} + \ldots + f(x_{m-1},y_{n-1})\Delta x_{m-1}\Delta y_{n-1}.$$

Перестановка членовъ не измѣнитъ ни суммы, ни ея предѣла; по этому мы можемъ замѣнить эту сумму суммою первыхъ членовъ горизонтальныхъ строкъ, сложенною съ суммою вторыхъ членовъ, и т. д., т. е. суммою:

$$\sum_{x_0}^{X}\sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\,\Delta y\,\Delta x;$$

а такъ какъ къ предѣлу послѣдней суммы приводится двойной интегралъ

---

*) $\sum_{y_0}^{Y} \varepsilon\,\Delta y = \varepsilon_1 \sum_{y_0}^{Y} \Delta y = \varepsilon_1 (Y - y_0)$ (ε_1 одно изъ среднихъ значеній ε)

$\int_{x_0}^{X} \omega\,dx = (X - x_0)\,\omega_1$ (ω_1 одно изъ среднихъ значеній ω).

$$\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx\,dy,$$

то:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Этимъ подтверждается независимость результата двойнаго интегрированія отъ порядка интегрированія.

486. Примѣняя тѣже разсужденія къ тройному интегралу, получимъ:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_{x_0}^{X}\left[\text{пред.}\sum_{y_0}^{Y}\sum_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,\Delta z\,\Delta y\right]dx.$$

$$= \int_{x_0}^{X}\left[\sum_{y_0}^{Y}\sum_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,\Delta z\,\Delta y - \omega\right]dx \quad \begin{pmatrix}\omega \text{ стремится къ } 0\\ \text{вмѣстѣ съ } \Delta z \text{ и } \Delta y\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{y_0}^{Y}\sum_{z_0}^{Z}\left[\Delta z\,\Delta y\int_{x_0}^{X} f(x,y,z)\,dx\right] - \int_{x_0}^{X}\omega\,dx$$

$$= \sum_{y_0}^{Y}\sum_{z_0}^{Z}\left\{\left[\sum_{x_0}^{X} f(x,y,z)\,\Delta x - \varepsilon\right]\Delta z\,\Delta y\right\} - \int_{x_0}^{X}\omega\,dx \quad \begin{pmatrix}\varepsilon \text{ стремится}\\ \text{къ } 0 \text{ вмѣстѣ}\\ \text{съ } \Delta x\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{y_0}^{Y}\sum_{z_0}^{Z}\sum_{x_0}^{X} f(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta z\,\Delta y - \sum_{y_0}^{Y}\sum_{z_0}^{Z}\varepsilon\,\Delta z\,\Delta y - \int_{x_0}^{X}\omega\,dx.$$

Предѣлы двухъ послѣднихъ членовъ—нули *); по этому:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \text{пред.}\sum_{y_0}^{Y}\sum_{z_0}^{Z}\sum_{x_0}^{X} f(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta z\,\Delta y.$$

---

*) $\sum_{y_0}^{Y}\sum_{z_0}^{Z}\varepsilon\,\Delta z\,\Delta y = \varepsilon_1\sum_{y_0}^{Y}\sum_{z_0}^{Z}\Delta z\,\Delta y = \varepsilon_1\,(Y-y_0)\,(Z-z_0)$ (ε_1 одно изъ среднихъ значеній ε).

Стало-быть и тройной интегралъ можно разсматривать какъ предѣлъ суммы значеній подъинтегральной функціи $f(x, y, z) \Delta z \Delta y \Delta x$ при измѣненіи перемѣнныхъ между предѣлами интегрированій. Не трудно распространить эту теорему на четверные и вообще кратные интегралы.

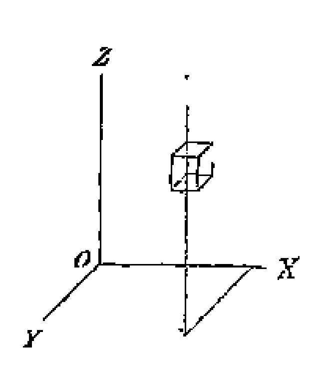
487. Пусть теперь въ двойномъ интегралѣ интегрированіе совершается по y между предѣлами, зависящими отъ x, потомъ по x между постоянными предѣлами. Въ такомъ интегралѣ, который во всякомъ случаѣ можно разсматривать какъ предѣлъ суммы, измѣненіе порядка интегрированія влечетъ за собою измѣненіе и результата, хотя бы подъинтегральная функція и оставалась сплошною въ предѣлахъ интегрированія.

Тоже самое можно сказать и относительно тройнаго интеграла, въ которомъ интегрированіе совершается, положимъ, по z въ предѣлахъ, зависящихъ отъ x и y, затѣмъ по y въ предѣлахъ, зависящихъ отъ x, и наконецъ по x въ постоянныхъ предѣлахъ.

Въ приложеніяхъ часто разсматриваются такого рода интегралы, и между прочимъ при вычисленіяхъ объемовъ и поверхностей тѣлъ.

Вычисленія объемовъ.

488. Для опредѣленія объема тѣла, ограниченнаго поверхностями, разобьемъ его на безконечно-малые элементы тремя системами плоскостей, соотвѣтственно параллельныхъ плоскостямъ координатъ. Каждый изъ этихъ элементовъ будетъ имѣть форму прямоугольнаго параллелепипеда (плоскости координатъ предполагаются взаимно перпендикулярными), и если разстоянія между парами смежныхъ плоскостей, соотвѣтственно параллельныхъ плоскостямъ XY, XZ и YZ, обозначимъ чрезъ Δz, Δy и Δx (приращенія координатъ z, y и x), то объемъ элементарнаго параллелепипеда выразится произведеніемъ $\Delta z \Delta y \Delta x$, — безконечно-малою величиною третьяго порядка (считая Δz, Δy и Δx одного порядка — перваго). Собирая эти элементы по линіи, параллельной оси OZ, до границъ тѣла, и складывая ихъ объ-



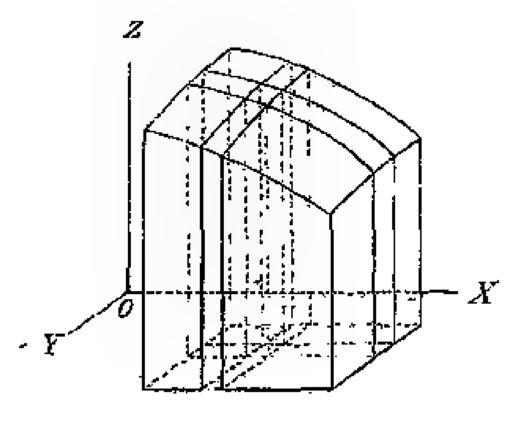
емы, получимъ сумму $\Sigma \Delta z \Delta y \Delta x$ (безконечно-малую втораго порядка), представляющую объемъ параллелепипеда, у котораго одно измѣреніе, параллельное OZ, конечное, а два другія (Δy и Δx) безконечно-малы. Складывая эти объемы, собирая ихъ по плоскости, параллельной плоскости YZ, до границъ тѣла, получимъ сумму $\Sigma \Sigma \Delta z \Delta y \Delta x$ (безконечно-малую перваго порядка), выражающую объемъ тѣла, у котораго только одно измѣреніе (Δx) безконечно-мало. Наконецъ, складывая объемы этихъ безконечно-тонкихъ слоевъ, получимъ сумму $\Sigma \Sigma \Sigma \Delta z \Delta y \Delta x$,—величину конечную. Искомый объемъ тѣла выразится предѣломъ послѣдней суммы, или, что все равно, тройнымъ интеграломъ

$$\int\int\int dz\,dy\,dx\,,$$

въ которомъ предѣлы интегрированій зависятъ отъ поверхностей, ограничивающихъ тѣло, и найдутся изъ уравненій этихъ поверхностей.

При первомъ складываніи элементарныхъ объемовъ, по линіи, параллельной OZ, мы собираемъ тѣ элементы, для которыхъ x и y остаются постоянными, и при переходѣ отъ одного къ другому измѣняется только z.

При второмъ сложеніи,—сложеніи объемовъ безконечно-тонкихъ параллелепипедовъ (втораго порядка), для составленія изъ нихъ безконечно-тонкаго слоя (перваго порядка) мы собираемъ тѣ изъ нихъ, которые прилегаютъ къ плоскости, параллельной плоскости YZ, и стало-быть для которыхъ x остается постояннымъ. По этому, выражая объемъ тѣла тройнымъ интеграломъ, мы при первомъ интегрированіи, по z, будемъ считать x и y постоянными; при второмъ интегрированіи — интегрированіи по y функціи, уже z въ себѣ не содержащей, будемъ считать x постояннымъ.



489. **Пусть тѣло ограничено поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью XY ($z = 0$); двумя плоскостями, параллельными плоскости XZ ($y = y_0$, $y = Y$) и двумя плоскостями, параллельными плоскости** YZ ($x = x_0$, $x = X$); тогда пре-

дѣлы интегрированія по z будутъ: 0 и $f(x, y)$, по y: y_0 и Y, по x: x_0 и X; и потому, обозначая искомый объемъ тѣла чрезъ V, имѣемъ:

$$V = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{0}^{f(x,y)} dz\,dy\,dx.$$

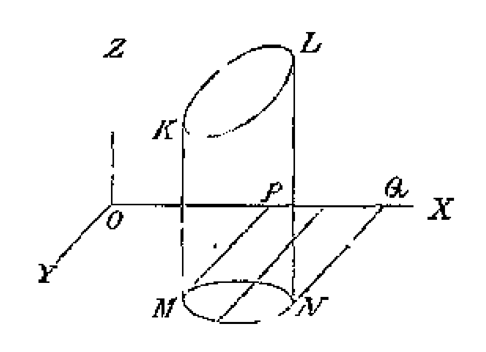
Выполняя интегрированіе по z, мы этотъ тройной интегралъ приведемъ къ двойному:

$$V = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Двойной интегралъ можно получить и независимо отъ тройнаго, разбивая разсматриваемый объемъ на элементы не тремя, а двумя системами плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ XZ и YZ. Объемъ элементарнаго параллелепипеда будетъ тогда $z\,\Delta y\,\Delta x$ или $f(x, y)\,\Delta y\,\Delta x$; стало-быть:

$$V = \text{пред.} \sum_{x_0}^{X}\sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y\Delta x = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx.$$

490. **Если тѣло ограничено поверхностью** $z = f(x, y)$, **плоскостью** XY ($z = 0$) **и цилиндрическою поверхностью** $\varphi(x, y) = 0$, то предѣлы интегрированія по y и по x найдутся изъ уравненія слѣда цилиндра на плоскости XY, т. е. изъ уравненія $\varphi(x, y) = 0$. Слѣдъ этотъ—линія сомкнутая, и потому изъ уравненія его получимъ для y не менѣе двухъ значеній. Пусть этихъ значеній два: $y_1 = \psi_1(x)$ и $y_{11} = \psi_{11}(x)$. Функціи $\psi_1(x)$ и $\psi_{11}(x)$ будутъ предѣлами интегрированія по y. Чтобы найти предѣлы интегрированія по x, замѣтимъ, что y_1 и y_{11} сближаются по мѣрѣ приближенія x къ его предѣламъ, и дѣлаются равными, когда x принимаетъ то или другое предѣльное значеніе. Стало-быть предѣлы интегрированія по x (обозначимъ ихъ чрезъ a_1 и a_{11}) найдутся изъ уравненія: $\psi_1(x) = \psi_{11}(x)$. И такъ искомый объемъ



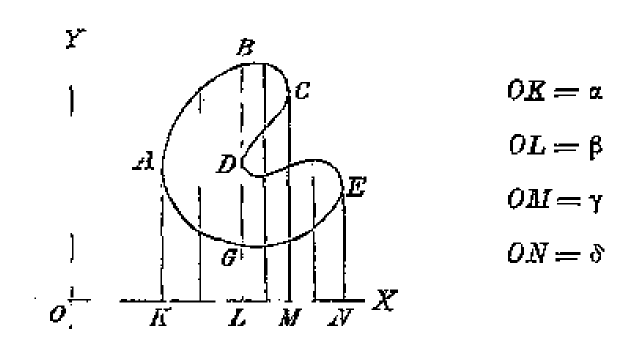
$$V = \int_{a_1}^{a_{11}} \int_{\psi_1(x)}^{\psi_{11}(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

На чертежѣ KL есть линія пересѣченія поверхностей $z = f(x, y)$ и $\varphi(x, y) = 0$; MN проэкція этой линіи на плоскости XY, или, что все равно, слѣдъ цилиндра $\varphi(x, y) = 0$ на плоскости XY; OP и OQ предѣльныя значенія x (a_1 и a_{11}), т. е. координаты x тѣхъ точекъ слѣда, въ которыхъ касательныя къ нему параллельны оси OY.

Получить объемъ V мы можемъ и измѣняя порядокъ интегрированія, но измѣняя при этомъ и предѣлы интегрированія. Такъ, если уравненіе $\varphi(x, y) = 0$, по разрѣшеніи относительно x, даетъ: $x_1 = \xi_1(y)$, $x_{11} = \xi_{11}(y)$, а уравненіе: $\xi_1(y) = \xi_{11}(y)$ даетъ для y значенія b_1 и b_{11}, то:

$$V = \int_{b_1}^{b_{11}} \int_{\xi_1(y)}^{\xi_{11}(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Если слѣдъ цилиндра на плоскости XY пересѣкается прямыми, параллельными OY, болѣе чѣмъ въ двухъ точкахъ, то разсматривае-



мое тѣло можно разложить на нѣсколько другихъ, найти объемы послѣднихъ отдѣльно и потомъ сложить эти объемы. Пусть напр. слѣдъ этотъ есть фигура $ABCDEGA$. Касательныхъ къ ней, параллельныхъ OY, четыре: AK, DL, CM и EN. Соотвѣтственныя этимъ касательнымъ значенія x пусть будутъ: α, β, γ и δ. Ордината y имѣетъ одно значеніе при $x = \alpha$, два при $x \gtrless {\alpha \atop \beta}$, три при $x = \beta$, четыре при $x \gtrless {\beta \atop \gamma}$, три при $x = \gamma$, два при $x \gtrless {\gamma \atop \delta}$ и одно при $x = \delta$. Пусть ординаты точекъ линій AG и AB выражаются функціями $\psi_1(x)$ и $\psi_{11}(x)$, ординаты точекъ линій DC и BC—функціями $\xi_1(x)$

и $\xi_{11}(x)$, и наконецъ ординаты точекъ линій GE и DE—функціями $\zeta_1(x)$ и $\zeta_{11}(x)$. Плоскость $x=\beta$ дѣлитъ разсматриваемое тѣло на три части: одна часть стоитъ на фигурѣ ABG, другая на BCD и третья на DEG. Пусть объемы ихъ: V_1, V_{11} и V_{111}, а объемъ всего тѣла V; тогда:

$$V_1=\int_\alpha^\beta\int_{\psi_1(x)}^{\psi_{11}(x)} f(x,y)\,dy\,dx,\quad V_{11}=\int_\beta^\gamma\int_{\xi_1(x)}^{\xi_{11}(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

$$V_{111}=\int_\beta^\delta\int_{\zeta_1(x)}^{\zeta_{11}(x)} f(x,y)\,dy\,dx;\quad V=V_1+V_{11}+V_{111}.$$

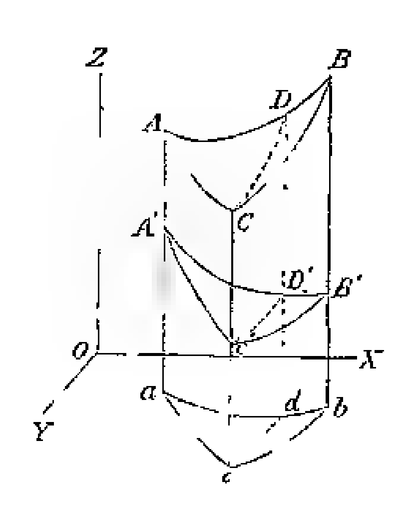
Количества α, β, γ и δ корни уравненій:

$$\psi_1(x)=\psi_{11}(x),\quad \zeta_{11}(x)=\xi_1(x),\quad \xi_1(x)=\xi_{11}(x),\quad \zeta_1(x)=\zeta_{11}(x),$$

α корень перваго, β—втораго, γ—третьяго и δ—четвертаго.

491. **Тѣло** $A\,B\,C\,A'\,B'\,C'$ **ограничено пятью поверхностями:**

$$z=f(x,y),\ z=f_1(x,y),\ \varphi(x,y)=0,\ \psi(x,y)=0,\ \xi(x,y)=0.$$



Изъ нихъ, какъ видимъ по уравненіямъ, послѣднія три цилиндрическія, съ производящими, параллельными оси OZ. Первая и вторая пусть пересѣкаются съ третьею по линіямъ AB и $A'B'$, съ четвертою—по линіямъ AC и $A'C'$ и съ пятою—по линіямъ BC и $B'C'$. Проэкціи этихъ линій на плоскости XY, или, что все равно, слѣды цилиндрическихъ поверхностей на этой плоскости, пусть: ab, ac и bc. Уравненія ихъ: $\varphi(x,y)=0$ (линіи ab), $\psi(x,y)=0$ (линіи ac), $\xi(x,y)=0$ (линіи bc) пусть даютъ послѣдовательно:

$$y=\varphi_1(x),\ y=\psi_1(x),\ y=\xi_1(x).$$

Абсциссы точекъ a, b и c на плоскости XY (назовемъ ихъ бук-

вами α, β и γ), какъ точекъ пересѣченія кривыхъ ab съ ac, ab съ bc и ac съ bc, найдутся изъ уравненій:

$$\varphi_1(\alpha) = \psi_1(\alpha),\ \varphi_1(\beta) = \xi_1(\beta),\ \psi_1(\gamma) = \xi_1(\gamma).$$

Полагая: $\alpha < \gamma < \beta$, проведемъ чрезъ линію Cc плоскость, параллельную плоскости YZ. Эта плоскость раздѣлитъ тѣло $ABCA'B'C'$ на двѣ части: $ACDA'C'D'$ и $BCDB'C'D'$, объемы которыхъ будутъ:

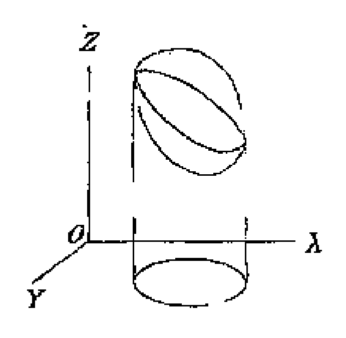
$$\int_\alpha^\gamma \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} [f(x,y) - f_1(x,y)]\,dy\,dx,\quad \int_\gamma^\beta \int_{\varphi_1(x)}^{\xi_1(x)} [f(x,y) - f_1(x,y)]\,dy\,dx;$$

а сумма этихъ объемовъ дастъ объемъ $ABCA'B'C'$.

492. **Тѣло ограничено одною поверхностью**, уравненіе которой, по разрѣшеніи относительно z, пусть даетъ:

$$z_1 = \varphi_1(x, y) \text{ и } z_{11} = \varphi_{11}(x, y).$$

Чтобы найти объемъ этого тѣла, вообразимъ касательную къ нему цилиндрическую поверхность, производящія которой параллельны оси OZ. Линія касанія этой поверхности съ данною раздѣлитъ данную поверхность на двѣ части. Пусть одна часть нижняя, другая — верхняя, и z_1 относится къ нижней части поверхности, z_{11} — къ верхней. Для точекъ общихъ данной поверхности и цилиндрической, т. е. для точекъ линіи касанія, z_1 и z_{11} дѣлаются равными; по этому уравненіе цилиндрической поверхности, а также слѣда ея на плоскости XY (или проэкціи линіи касанія на плоскости XY) будетъ:



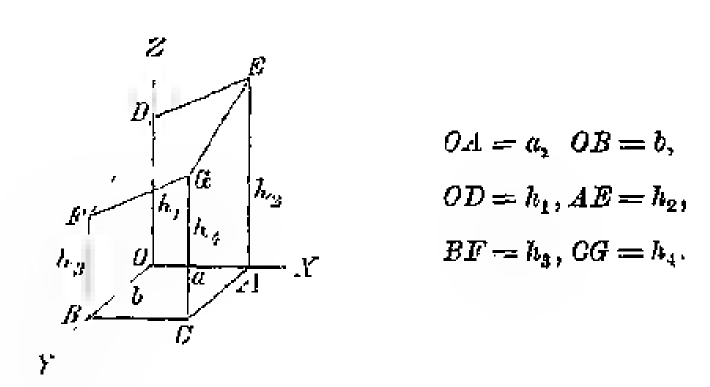
$$\varphi_1(x,y) = \varphi_{11}(x,y).$$

Если это уравненіе даетъ: $y_1 = \psi_1(x)$, $y_{11} = \psi_{11}(x)$, а уравненію $\psi_1(x) = \psi_{11}(x)$ удовлетворяютъ два значенія x: a_1 и a_{11}, то объемъ разсматриваемаго тѣла выразится интеграломъ

$$\int_{a_1}^{a_{11}} \int_{\psi_1(x)}^{\psi_{11}(x)} [\varphi_{11}(x,y) - \varphi_1(x,y)]\,dy\,dx.$$

493. *Примѣры:*

а) **Объемъ усѣченнаго** (плоскостью, не параллельною основанію) **прямоугольнаго параллелепипеда.** Помѣстимъ начало координатъ въ вершинѣ O основанія $OACB$ параллелепипеда, а оси координатъ на-



правимъ по ребрамъ OA, OB и OD, и обозначимъ длины реберъ OA и OB основанія чрезъ a и b, площадь основанія чрезъ S, длины реберъ, перпендикулярныхъ къ основанію чрезъ h_1, h_2, h_3 и h_4, искомый объемъ усѣченнаго параллелепипеда BE чрезъ V; тогда, если

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

есть уравненіе сѣкущей плоскости FE, то:

$$V = \int_0^a \int_0^b (\alpha x + \beta y + \gamma)\, dy\, dx = \frac{b}{2}\int_0^a (2\alpha x + \beta b + 2\gamma)\, dx$$

$$= \frac{ab}{2}(\alpha a + \beta b + 2\gamma) = S \cdot \frac{\alpha a + \beta b + 2\gamma}{2}.$$

Подставляя въ уравненіе плоскости FE координаты точекъ: $D(0, 0, h_1)$, $E(a, 0, h_2)$, $F(0, b, h_3)$ и $G(a, b, h_4)$, находящихся на этой плоскости, получимъ:

$$h_1 = \gamma,\ h_2 = \alpha a + \gamma,\ h_3 = \beta b + \gamma,\ h_4 = \alpha a + \beta b + \gamma,$$

откуда:

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{2} = \alpha a + \beta b + 2\gamma.$$

Слѣдовательно:

$$V = S.\frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{4},$$

т. е. *объемъ усѣченнаго прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію площади его основанія на среднюю ариѳметическую между боковыми ребрами* *).

b) Объемъ эллипсоида. Выразимъ объемъ эллипсоида тройнымъ интеграломъ $\iiint dz\,dy\,dx$. Предѣлы интегрированія по z найдемъ изъ уравненія $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, разрѣшая его относительно z; они будутъ:

$$z_1 = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\ z_{11} = +c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};$$

предѣлы интегрированія по y найдемъ изъ уравненія:

$$z_1 = z_{11},\ \text{или:}\ 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

которое даетъ:

$$y_1 = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad y_{11} = +b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};$$

предѣлы интегрированія по x — изъ уравненія:

$$y_1 = y_{11},\quad \text{или:}\ 1-\frac{x^2}{a^2}=0,$$

откуда: $$x_1 = -a,\ x_{11} = +a.$$

Итакъ, обозначая искомый объемъ чрезъ V, имѣемъ:

$$V = \int_{-a}^{+a}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\,dy\,dx = 8c\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx.$$

---

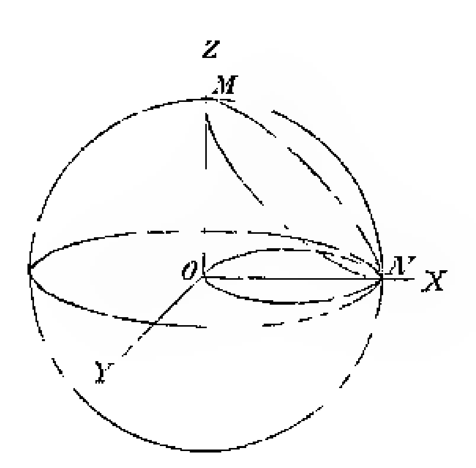
*) Результатъ этотъ получается очень просто элементарнымъ путемъ двумя разложеніями параллелепипеда на треугольныя призмы.

Положеніе $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\varphi$ даетъ: $dy = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos\varphi\, d\varphi$; по этому:

$$\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dy = b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi b}{4}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

$$V = 2\pi\, bc \int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi a\, bc.$$

c) Объемъ тѣла, ограниченнаго плоскостью $z=0$, шаровою поверхностью: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, и цилиндрическою $x^2+y^2-Rx=0$. Выразимъ этотъ объемъ двойнымъ интеграломъ $\iint z\, dy\, dx$.



Изъ уравненія: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ положительный $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; изъ уравненія $x^2+y^2-Rx=0$ предѣлы интегрированія по y:

$$y_{\text{I}} = -\sqrt{Rx-x^2},\ y_{\text{II}} = +\sqrt{Rx-x^2};$$

изъ уравненія: $y_{\text{I}} = y_{\text{II}}$, или: $Rx-x^2=0$, предѣлы интегрированія по x:

$$x_{\text{I}} = 0, \quad x_{\text{II}} = R.$$

Искомый объемъ пусть V.

$$V=\int_0^R\int_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{+\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\,dx=2\int_0^R\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\,dx.$$

$$2\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy=\left[y\sqrt{R^2-x^2-y^2}+(R^2-x^2)\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_0^{\sqrt{Rx-x^2}}$$

$$=(R-x)\sqrt{Rx}+(R^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}.$$

$$V=\int_0^R(R-x)\sqrt{Rx}\,dx+\int_0^R(R^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,dx.$$

$$\int_0^R(R-x)\sqrt{Rx}\,dx=\frac{4}{15}R^3,$$

$$\int_0^R(R^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,dx=\int_0^R\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,d\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)$$

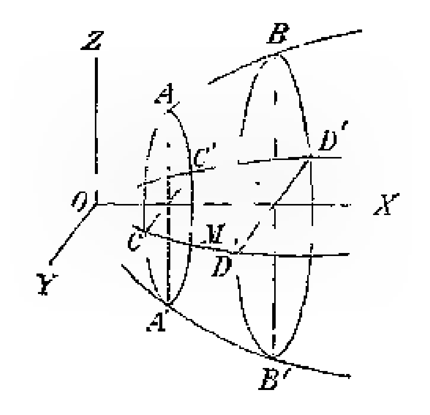
$$=\frac{\pi R^3}{6}-\frac{\sqrt{R}}{6}\int_0^R\frac{(3R^2-x^2)\sqrt{x}}{R+x}\,dx=\frac{\pi R^3}{3}-\frac{32}{45}R^3.$$

$$V=\frac{\pi R^3}{3}-\frac{4}{9}R^3.$$

494. Пусть V объемъ тѣла вращенія, ограниченнаго поверхностью вращенія:

$$y^2+z^2=[f(x)]^2\qquad (OX\ \text{ось вращенія})$$

и плоскостями: $x=x_0$ и $x=X$, перпендикулярными къ оси вращенія. Круги AA' и BB' пусть сѣченія поверхности этими плоскостями. Кривыя AB и $A'B'$ — сѣченія поверхности плоскостью XZ; уравненія этихъ кривыхъ въ плоскости XZ, — первой: $z=f(x)$ (считая $f(x)>0$), второй: $z=-f(x)$. Кривыя CD и $C'D'$ — сѣченія по-



верхности плоскостью XY; уравненія ихъ въ этой плоскости,—первой: $y=f(x)$, второй: $y=-f(x)$. Сѣченія эти, какъ сѣченія плоскостями, проходящими чрезъ ось вращенія, — меридіональныя. Уравненіе поверхности вращенія даетъ:

$$z=\sqrt{(f(x))^2-y^2}\,; \qquad \left(\begin{array}{c}z \text{ беремъ поло-}\\ \text{жительнымъ}\end{array}\right)$$

по этому:

$$V=2\int_{x_0}^{X}\int_{-f(x)}^{+f(x)}\sqrt{(f(x))^2-y^2}\,dy\,dx=4\int_{x_0}^{X}\int_{0}^{f(x)}\sqrt{(f(x))^2-y^2}\,dy\,dx;$$

а такъ какъ: $\int_0^{f(x)}\sqrt{(f(x))^2-y^2}\,dy=(f(x))^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{4}(f(x))^2$, то:

$$V=\pi\int_{x_0}^{X}(f(x))^2\,dx.$$

Результатъ этотъ подтверждаетъ выведенное въ n^0 407.

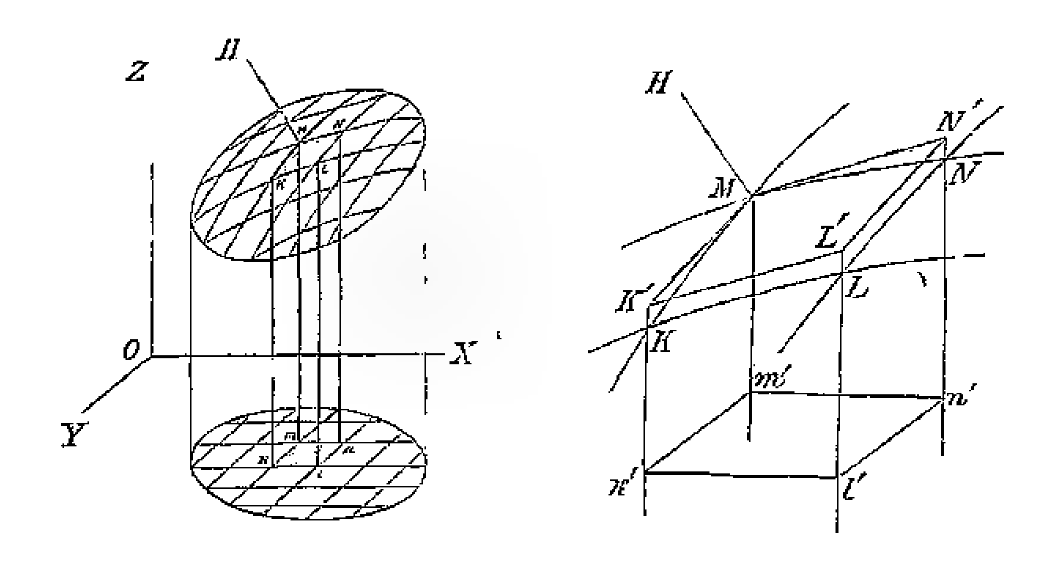
Вычисленіе поверхностей.

493. Дана ограниченная часть поверхности; требуется *величину* *) ея выразить въ квадратныхъ единицахъ. Раздѣлимъ разсматриваемую поверхность на элементы двумя системами параллельныхъ плоскостей. На каждомъ элементѣ (внутри его, или на границѣ) возьмемъ точку и проведемъ чрезъ нее касательную плоскость къ поверхности до встрѣчи съ четырьмя ближайшими разбивающими плоскостями. При каждомъ элементѣ поверхности такимъ образомъ построится плоскій элементъ (часть касательной плоскости), имѣющій форму параллелограмма. Сумму площадей всѣхъ этихъ плоскихъ элементовъ, до границъ поверхности, мы можемъ выразить въ квадратныхъ единицахъ. Съ уменьшеніемъ взаимныхъ разстояній тѣхъ и другихъ разбивающихъ плоскостей, площадь каждаго элемента уменьшается, под-

---

*) Не говоримъ *площадь поверхности*, — потому что терминъ *площадь* относятъ обыкновенно къ плоскимъ фигурамъ.

ходя къ 0 (при этомъ число элементовъ растетъ безгранично), а сумма площадей, измѣняясь, стремится къ нѣкоторому предѣлу. *Этотъ предѣлъ* и будетъ *величиною поверхности*. Мы увидимъ, что онъ не зависитъ отъ положеній точекъ на элементахъ, чрезъ которыя проводятся касательныя плоскости, и отъ закона уменьшенія разстояній между плоскостями. Пусть: $f(x, y, z) = 0$ уравненіе поверхности (въ прямоугольныхъ координатахъ), и пусть разсѣкающія плоскости одной системы параллельны плоскости XZ, а другой—плоскости YZ. Разсмотримъ одинъ изъ элементовъ поверхности при точкѣ $M(x, y, z)$, чрезъ которую проведемъ и касательную къ нему плоскость. Элементъ этотъ пусть $MNLK$, а соотвѣтствующій ему элементъ на касательной



плоскости—$MN'L'K'$; послѣдній -плоскій, и по фигурѣ—параллелограмъ *). Общая проэкція этихъ элементовъ въ плоскости XY—прямоугольникъ $mnlk$. (На второмъ чертежѣ, большаго размѣра, проэкція представлена въ плоскости параллельной плоскости XY). Пусть ω площадь послѣдняго прямоугольника, ε площадь параллелограмма $MN'L'K'$, и γ острый уголъ, образуемый нормалью MH къ поверхности съ осью OZ; тогда:

$$\varepsilon = \omega \cdot \frac{1}{\cos\gamma} = \omega\sqrt{1+p^2+q^2}\,,\ \text{гдѣ: } p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\,;$$

*) Плоскіе элементы не прилегаютъ боками другъ къ другу, и по этому не составляютъ сплошной поверхности.

а такъ какъ: $\omega = mn \cdot mk = \Delta x \Delta y$, то:

$$\varepsilon = \Delta x \Delta y \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Складывая площади параллелограммовъ, собирая сперва тѣ, для которыхъ x остается постояннымъ, мы получимъ сумму:

$$\Sigma \Delta x \Delta y \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

элементы которой находятся при одной и тойже плоскости, параллельной плоскости YZ, и по одну ея сторону.

Складывая подобныя суммы, измѣняя при этомъ x, получимъ сумму:

$$\Sigma \Sigma \Delta x \Delta y \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

предѣлъ которой, двойной интегралъ

$$\int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy\, dx,$$

и выразитъ искомую величину поверхности.

Предѣлы интегрированій найдутся изъ уравненій проэкцій на плоскости XY тѣхъ линій, которыми ограничена поверхность.

Плоскость, касательную къ элементу $MNLK$, мы провели чрезъ точку M. Если провесть ее чрезъ другую точку этого элемента, то площадь соотвѣтствующаго плоскаго элемента будетъ другая, отличная отъ ε, а площадь его проэкціи въ плоскости XY прежняя. Обозначая эту новую площадь чрезъ ε_1, а уголъ, образуемый съ осью OZ нормалью къ поверхности въ новой точкѣ, чрезъ γ_1, получимъ:

$$\varepsilon_1 = \omega \cdot \frac{1}{\cos \gamma_1}, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma_1}, \text{пред.} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \text{пред.} \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma_1} = 1;$$

слѣдовательно предѣлы суммъ $\Sigma \varepsilon_1$ и $\Sigma \varepsilon$ одинаковы.

Дадимъ другое опредѣленіе величинѣ кривой поверхности. Въ данную поверхность впишемъ поверхность многогранную, состоящую изъ плоскихъ прямолинейныхъ фигуръ (треугольниковъ или вообще какихъ-нибудь многоугольниковъ), и станемъ подводить каждую грань къ 0. Число граней будетъ при этомъ расти безгранично, а граница многогранной поверхности подходить къ линіи, ограничивающей кри-

вую поверхность. Сумма площадей граней, т. е. величина многогранной поверхности, изменяясь, будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу, который и представитъ *величину кривой поверхности*. Докажемъ, что такое опредѣленіе величины поверхности приведетъ къ тому же двойному интегралу $\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\, dy\, dx$.

Вписавши многогранную поверхность, проведемъ прежнія системы разсѣкающихъ плоскостей, изъ которыхъ однѣ параллельны плоскости XZ, другія—плоскости YZ. Этими плоскостями многогранная поверхность раздѣлится на части, число которыхъ будетъ одинаково съ числомъ элементовъ кривой поверхности. Каждая изъ этихъ частей, вообще говоря, будетъ состоять изъ нѣсколькихъ граней. Разсмотримъ одну изъ такихъ частей, соотвѣтствующую параллелограмму $MNL'K'$. Пусть эта часть содержитъ въ себѣ k граней, площади которыхъ: $p_1, p_2, \ldots, p_k$, а P сумма площадей. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ углы (острые), образуемые нормальными къ этимъ гранямъ съ осью OZ. Сумма площадей проэкцій граней на плоскость XY дастъ площадь прямоугольника $mnlk$, т. е. произведеніе $\Delta x\, \Delta y$ *):

$$p_1 \cos \xi_1 + p_2 \cos \xi_2 + \ldots + p_k \cos \xi_k = \Delta x\, \Delta y.$$

Не нарушая послѣдняго равенства, мы можемъ въ немъ углы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ замѣнить нѣкоторымъ среднимъ между наименьшимъ и наибольшимъ изъ нихъ. Пусть этотъ замѣняющій средній есть ξ; тогда:

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_k) \cos \xi = \Delta x\, \Delta y, \text{ или: } P \cos \xi = \Delta x\, \Delta y,$$

откуда:

$$P = \Delta x\, \Delta y \cdot \frac{1}{\cos \xi}.$$

Сравнивая P съ $\varepsilon = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{1}{\cos \gamma}$, и переходя потомъ къ предѣлу отношенія, находимъ:

$$\frac{P}{\varepsilon} = \frac{\cos \gamma}{\cos \xi}, \text{ пред. } \frac{P}{\varepsilon} = \text{пред. } \frac{\cos \gamma}{\cos \xi} = 1,$$

откуда заключаемъ, что: пред. $\Sigma P =$ пред. $\Sigma\, \varepsilon$.

---

*) Разсматриваемую часть поверхности и положеніе ея относительно плоскости XY беремъ такими, чтобы проэкціи граней не ложились одна на другую, а каждая занимала отдѣльное мѣсто, и стало-быть всѣ вмѣстѣ составляли прямоугольникъ $mnlk$.

Если-бы величину поверхности разсматривали, какъ *предѣлъ многогранной описанной поверхности*, то пришли-бы опять къ тому же результату, двойному интегралу $\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$.

496. *Примѣръ: Найдемъ* часть MN (черт. с n° 493) шаровой поверхности: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, отрѣзываемую цилиндрическою: $x^2+y^2-Rx=0$.

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0,$$

$$x+zp=0,\ y+zq=0,\ p=-\frac{x}{z},\ q=-\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Пусть S искомая поверхность.

$$S=\int_0^R\int_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{+\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dy\,dx=2R\int_0^R\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\frac{dy\,dx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)_0^{\sqrt{Rx-x^2}}=\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x}{R+x}},$$

$$S=2R\int_0^R\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,dx=\pi R^2-2R^2=$$

$=$ *разности между четвертью поверхности шара и площадью прямоугольника, имѣющаго основаніемъ діаметръ, а высотою радіусъ шара.*

497. Пусть S часть поверхности вращенія:

$$y^2+z^2=(f(x))^2,\qquad (OX \text{ ось вращенія})$$

между плоскостями: $x=x_0$ и $x=X$ (перпендикулярными къ оси вращенія) (черт. n° 494). Дифференцируя уравненіе этой поверхности, получимъ:

$$zp=f(x)f'(x),\ y+zq=0, \text{ откуда:}$$

$$p=\frac{f(x)f'(x)}{z},\ q=-\frac{y}{z};$$

по этому:

$$1+p^2+q^2=\frac{y^2+z^2+(f(x))^2(f'(x))^2}{z^2}=\left[\frac{f(x)}{z}\right]^2\left[1+(f'(x))^2\right],$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}}.$$

Слѣдовательно:

$$S=2\int_{x_0}^{X}\int_{-f(x)}^{+f(x)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dy\,dx=4\int_{x_0}^{X}\left[f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\int_0^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}}\right];$$

а такъ какъ:

$$\int_0^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}}=\left[\arcsin\frac{y}{f(x)}\right]_0^{f(x)}=\frac{\pi}{2},$$

то:

$$S=2\pi\int_{x_0}^{X}f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Обозначимъ чрезъ s длину дуги CM кривой CD, считая отъ точки C (въ которой $x=x_0$) до произвольной точки M (x, y) этой кривой; тогда: $\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=ds$. Дѣйствительно: изъ уравненія кривой CD $(y=f(x))$ имѣемъ: $dy=f'(x)\,dx$; по этому:

$$ds^2=dx^2+dy^2=[1+(f'(x))^2]\,dx^2.$$

Слѣдовательно:

$$S=2\pi\int_{x_0}^{X}y\,ds \qquad \left(\text{предѣлы интегрированія относятся къ } x\right).$$

Этимъ подтверждается выведенное въ n° 420.

498. Если въ двойномъ или тройномъ интегралѣ предѣлы интегрированія не даны непосредственно, то, разсматривая интегралъ, какъ предѣлъ суммы, мы ихъ найдемъ, когда дано то протяженіе, въ которомъ измѣняются перемѣнныя при переходѣ отъ одного элемента суммы къ другому. Границы протяженія приведутъ къ этимъ предѣламъ.

Такъ, въ двойномъ интегралѣ $\iint f(x,y)\,dy\,dx$, распространяемомъ на всѣ значенія x и y, удовлетворяющія неравенствамъ: $\begin{matrix} x > x_0 \\ < X \end{matrix}$ и $\begin{matrix} y > y_0 \\ < Y \end{matrix}$, или, говоря геометрически, на всю площадь прямоугольника, ограниченнаго прямыми: $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, — предѣлы интегрированія, какъ соотвѣтствующіе границамъ прямоугольника, т. е. его периметру, будутъ по y: y_0 и Y, а по x: x_0 и X. Интегралъ этотъ, какъ видѣли, выражаетъ объемъ тѣла, ограниченнаго поверхностью $z = f(x,y)$ и плоскостями: $z = 0$, $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$.

Распространяя двойной интегралъ $\iint f(x,y)\,dy\,dx$ на всѣ значенія x и y, удовлетворяющія неравенству $\varphi(x,y) < 0$, — другими словами—на всю площадь фигуры, ограниченной кривою $\varphi(x,y) = 0$ *), — мы найдемъ предѣлы интегрированій изъ уравненія $\varphi(x,y) = 0$, какъ было показано въ n° 490. Интегралъ этотъ выразитъ тогда объемъ тѣла, ограниченнаго плоскостью $z = 0$ и поверхностями: $z = f(x,y)$ и $\varphi(x,y) = 0$.

Если для всѣхъ точекъ внутри нѣкотораго тѣла функція $\psi(x,y,z)$ имѣетъ значенія отрицательныя, а для точекъ внѣ этого тѣла — положительныя, то для точекъ, взятыхъ на границѣ тѣла, она обратится въ 0, и по этому уравненіе поверхности, ограничивающей тѣло, будетъ: $\psi(x,y,z) = 0$; тогда тройной интегралъ $\iiint f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$, распространяемый на всѣ значенія x, y, z, удовлетворяющія неравенству $\psi(x,y,z) < 0$, —другими словами—на все пространство, ограниченное поверхностью $\psi(x,y,z) = 0$, —представитъ предѣлъ суммы произведеній элементарныхъ объемовъ $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, наполняющихъ разсматриваемое тѣло, на соотвѣтствующія значенія функціи $f(x,y,z)$, —и предѣлы интегрированій, какъ отвѣчающіе границамъ тѣла, найдутся изъ уравненія $\psi(x,y,z) = 0$, какъ было показано въ n° 492.

Въ случаяхъ болѣе сложныхъ условій для предѣловъ интегрированій, интегралъ разбивается на нѣсколько другихъ интеграловъ съ особыми предѣлами интегрированій для каждаго.

---

*) Мы предполагаемъ, что кривая эта — сомкнутая, и что функція $\varphi(x,y)$ для точекъ внутреннихъ относительно этой кривой принимаетъ значенія отрицательныя, а для точекъ внѣшнихъ — положительныя.

Преобразованія двойныхъ интеграловъ.

499. Данъ двойной интегралъ:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

распространяемый на всѣ значенія x и y, удовлетворяющія неравенству: $\varphi(x, y) < 0$; требуется преобразовать его въ другой введеніемъ на мѣсто x и y новыхъ перемѣнныхъ.

Замѣнимъ сначала x новою перемѣнною a, которую свяжемъ съ x уравненіемъ:

$$x = \psi(a, y).$$

При интегрированіи по x, а теперь вмѣсто x по a, слѣдуетъ y считать постояннымъ; по этому послѣднее уравненіе дастъ:

$$dx = \frac{\partial \psi}{\partial a} da,$$

и интегралъ приведется къ интегралу

$$\iint f_1(a, y) \frac{\partial \psi}{\partial a} da\, dy,$$

въ которомъ: $f_1(a, y) = [f(x, y)]_{x=\psi(a, y)}$, и который распространяется на всѣ значенія a и y удовлетворяющія неравенству $\varphi_1(a, y) < 0$, гдѣ: $\varphi_1(a, y) = [\varphi(x, y)]_{x=\psi(a, y)}$.

Преобразуемъ и послѣдній интегралъ. Введемъ вмѣсто y новую перемѣнную b, связывая ее съ y уравненіемъ:

$$y = \xi(a, b).$$

Такъ какъ при интегрированіи по y, а теперь, съ введеніемъ новой перемѣнной, по b, слѣдуетъ a считать постояннымъ, то:

$$dy = \frac{\partial \xi}{\partial b} db,$$

и послѣдній интегралъ приведется къ интегралу

$$\iint F(a, b) \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right) \frac{\partial \xi}{\partial b} da\, db,$$

въ которомъ:

$$F(a, b) = \Big[f_1(a,y)\Big]_{y=\xi(a,b)}, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right) = \left[\frac{\partial\psi}{\partial a}\right]_{y=\xi(a,b)}$$

и который распространяется на всѣ значенія a и b, удовлетворяющія неравенству

$$\Theta(a, b) < 0, \text{ гдѣ } \Theta(a, b) = [\varphi_1(a, y)]_{y=\xi(a,b)}.$$

Предѣлы интегрированій подразумѣваются. Они въ данномъ интегралѣ найдутся при посредствѣ уравненія $\varphi(x, y) = 0$, а въ послѣднемъ при посредствѣ $\Theta(a, b) = 0$.

И такъ, подразумѣвая предѣлы интегрированій, имѣемъ:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint F(a, b) \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right) \frac{\partial\xi}{\partial b}\, da\, db.$$

Здѣсь $\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)$ есть производная $\frac{\partial\psi}{\partial a}$, выраженная въ a и b изъ уравненій:

$$x = \psi(a, y), \; y = \xi(a, b).$$

Дифференцируя первое по a и по b, принимая эти перемѣнныя за независимыя, и стало-быть разсматривая x и y какъ функціи a и b, получимъ:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial\psi}{\partial a} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b},$$

откуда:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right) = \frac{\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}}{\frac{\partial y}{\partial b}}.$$

Слѣдовательно:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)\frac{\partial\xi}{\partial b} = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a},$$

и потому:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint F(a, b)\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right) da\, db.$$

Обозначимъ $\psi(a, \xi(a, b))$ чрезъ $\theta(a, b)$. Функцію $F(a, b)$ можно

составить прямо изъ $f(x, y)$ замѣною x и y функціями $\theta(a, b)$ и $\xi(a, b)$. Разность: $\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}$ есть дифференціальный опредѣлитель функцій θ и ξ и составится при посредствѣ производныхъ: $\frac{\partial\theta}{\partial a}$, $\frac{\partial\theta}{\partial b}$, $\frac{\partial\xi}{\partial a}$ и $\frac{\partial\xi}{\partial b}$ *).

$$F(a, b)=f(\theta(a, b),\ \xi(a, b))$$

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}=\frac{\partial\theta}{\partial a}\frac{\partial\xi}{\partial b}-\frac{\partial\theta}{\partial b}\frac{\partial\xi}{\partial a}.$$

Послѣдній интегралъ распространяется на всѣ значенія a и b, для которыхъ $\Theta(a, b)<0$, гдѣ $\Theta(a, b)=\Big[\varphi(x, y)\Big]_{\substack{x=\theta(a, b)\\ y=\xi(a, b)}}$.

500. Къ тому же результату приведутъ слѣдующія разсужденія. Пусть зависимость между прежними перемѣнными x и y и новыми a и b выражается уравненіями:

$$x=\theta(a, b),\ \ y=\xi(a, b).$$

Дифференцируя эти уравненія, получимъ:

$$dx=\frac{\partial\theta}{\partial a}da+\frac{\partial\theta}{\partial b}db$$

$$dy=\frac{\partial\xi}{\partial a}da+\frac{\partial\xi}{\partial b}db.$$

При интегрированіи по x, въ двойномъ интегралѣ $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$ слѣдуетъ y считать постояннымъ, а по этому dy равнымъ 0, стало-быть:

$$\frac{\partial\xi}{\partial a}da+\frac{\partial\xi}{\partial b}db=0,\ \text{откуда:}\ db=-\frac{\frac{\partial\xi}{\partial a}}{\frac{\partial\xi}{\partial b}}da,$$

и по этому:

$$dx=\frac{\partial\theta}{\partial a}da-\frac{\partial\theta}{\partial b}\cdot\frac{\frac{\partial\xi}{\partial a}}{\frac{\partial\xi}{\partial b}}da=\frac{\frac{\partial\theta}{\partial a}\frac{\partial\xi}{\partial b}-\frac{\partial\theta}{\partial b}\frac{\partial\xi}{\partial a}}{\frac{\partial\xi}{\partial b}}da,$$

*) Опредѣлитель этотъ не 0, потому что функціи θ и ξ независимы (n° 119).

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint F(a,b)\frac{\frac{\partial\theta}{\partial a}\frac{\partial\xi}{\partial b}-\frac{\partial\theta}{\partial b}\frac{\partial\xi}{\partial a}}{\frac{\partial\xi}{\partial b}}\,da\,dy.$$

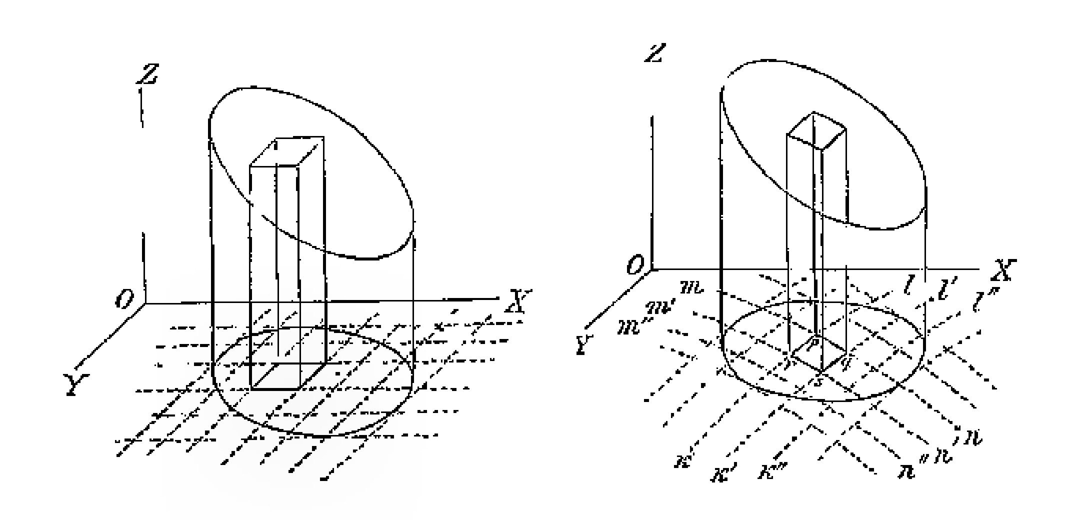
Разсматривая $F(a,b)\frac{\frac{\partial\theta}{\partial a}\frac{\partial\xi}{\partial b}-\frac{\partial\theta}{\partial b}\frac{\partial\xi}{\partial a}}{\frac{\partial\xi}{\partial b}}$ какъ функцію a и y *), и имѣя въ виду интегрированіе сперва по y, введемъ вмѣсто y новую перемѣнную b; тогда, считая a постояннымъ и по этому da нолемъ, получимъ:

$$dy = \frac{\partial\xi}{\partial b}\,db;$$

слѣдовательно:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint F(a,b)\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\frac{\partial\xi}{\partial b}-\frac{\partial\theta}{\partial b}\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)da\,db.$$

501. Разсмотримъ **преобразованіе двойнаго интеграла съ геометрической точки зрѣнія.** Мы знаемъ, что интегралъ $\iint f(x,y)dx\,dy$, распространенный на всѣ значенія x и y, удовлетворяющія неравенству $\varphi(x,y)<0$, есть предѣлъ суммы объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ ($f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y$ — безконечно-малыхъ втораго порядка), стоящихъ на плоскости XY, простирающихся до поверхности $z=f(x,y)$ и обнимае-



*) Всегда можно представить себѣ b выраженнымъ въ a и y помощію уравненія $y = \xi(a,b)$.

мыхъ цилиндрическою поверхностью $\varphi(x, y)=0$,—другими словами—объемъ тѣла, ограниченнаго плоскостью XY и поверхностями: $z-f(x, y)$ и $\varphi(x, y)=0$. Элементарные объемы, его составляющіе, образуются, когда разсѣкаемъ тѣло двумя системами плоскостей, параллельныхъ соотвѣтственно плоскостямъ координатъ YZ и XZ. Но послѣдній объемъ, который обозначимъ черезъ V, можно получить, разбивая тѣло иначе на элементы. Вмѣсто плоскостей вообразимъ двѣ системы разбивающихъ цилиндрическихъ поверхностей съ производящими параллельными оси OZ. Слѣды этихъ поверхностей на плоскости XY пусть кривыя kl, $k'l'$, $k''l''$, ... и mn, $m'n'$, $m''n''$, ... Будемъ разсматривать элементарные объемы, заключающіеся между двумя парами смежныхъ разсѣкающихъ поверхностей, стоящихъ на криволинейныхъ элементахъ плоскости XY и имѣющихъ высотами значенія функціи $f(x, y)$. Предѣлъ суммы этихъ объемовъ, обнимаемыхъ цилиндрическою поверхностью $\varphi(x, y)=0$, дастъ тотъ же объемъ V, который представляетъ разсматриваемый интегралъ. Пусть уравненіе кривыхъ первой системы:

$$(a) \qquad\qquad \psi_1(x, y, a)=0,$$

а уравненіе кривыхъ второй системы:

$$(b) \qquad\qquad \psi_{11}(x, y, b)=0.$$

Количества a и b—*перемѣнные параметры*, или *криволинейныя координаты* точекъ. Для всѣхъ точекъ какой-нибудь изъ кривыхъ первой системы, напр. кривой kl, параметръ a остается постояннымъ, а b измѣняется при переходѣ отъ одной ея точки къ другой. Для всѣхъ точекъ какой-нибудь изъ кривыхъ второй системы, напр. кривой mn, параметръ b остается постояннымъ, а a измѣняется. Изъ уравненій (a) и (b), зная прямолинейныя координаты (x и y) точки, мы найдемъ ея криволинейныя координаты (a и b), и наоборотъ. Прямолинейныя координаты опредѣляютъ положеніе точки пересѣченіемъ двухъ прямыхъ линій, а криволинейныя, вообще говоря, пересѣченіемъ двухъ кривыхъ. Если кривой kl отвѣчаетъ параметръ a, кривой mn параметръ b, то криволинейныя координаты точки p, точки пересѣченія этихъ кривыхъ, будутъ a и b.

Разсмотримъ фигуру $pqsr$, заключающуюся между смежными линіями kl и $k'l'$ первой системы кривыхъ и смежными линіями mn и $m'n'$

второй системы. Если принять безконечно-малыя линіи pq, pr, qs и rs за прямыя и въ выраженіяхъ координатъ точекъ p, q, r и s откинуть безконечно-малыя выше перваго порядка, то эту фигуру можно принять за параллелограммъ. Дѣйствительно: пусть параметры кривыхъ kl, $k'l'$, mn и $m'n'$ соотвѣтственно: a, $a + da$, b и $b + db$ (da и db безконечно-малыя одного порядка); тогда криволинейныя координаты точекъ p, q, r и s будутъ соотвѣтственно:

$$a \text{ и } b,\ a + da \text{ и } b,\ a \text{ и } b + db,\ a + da \text{ и } b + db,$$

а прямолинейныя (обозначая ихъ для точки p чрезъ x и y, и не принимая въ разложеніяхъ приращеній x и y безконечно-малыхъ выше перваго порядка относительно da и db)

$$\text{для точки } q : x + \frac{\partial x}{\partial a} da,\ y + \frac{\partial y}{\partial a} da,$$

$$\text{для точки } r : x + \frac{\partial x}{\partial b} db,\ y + \frac{\partial y}{\partial b} db,$$

$$\text{для точки } s : x + \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db,\ y + \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db,$$

— откуда видимъ, что $pq = rs$ и $pr = qs$, и стало-быть фигура $pqsr$ — параллелограммъ.

Производныя: $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}$ и $\frac{\partial y}{\partial b}$ найдутся изъ уравненій вида:

$$x = \theta\,(a, b),\ y = \xi\,(a, b),$$

вытекающихъ изъ (a) и (b).

Полагая для краткости:

$$\frac{\partial x}{\partial a} da = h,\ \frac{\partial y}{\partial a} da = k,\ \frac{\partial x}{\partial b} db = h_1,\ \frac{\partial y}{\partial b} db = k_1,$$

по разностямъ координатъ точекъ $p\,(x, y)$, $q\,(x + h,\ y + k)$ и $r\,(x + h_1,\ y + k_1)$, находимъ:

$$\text{площ. } pqsr = \text{абс. вел. } (hk_1 - h_1 k) = \text{абс. вел. } \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right) da\, db.$$

Стало-быть элементарный объемъ, стоящій на фигурѣ $pqsr$ и простирающійся до поверхности: $z = f\,(x, y)$, будетъ абсолютная величина произведенія:

$$F(a,b)\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right)da\,db,$$

гдѣ: $F(a,b)=f(\theta(a,b),\ \xi(a,b))$.

Такъ выражается элементарный объемъ, если не принимать въ немъ безконечно-малыхъ выше втораго порядка; но эти безконечно-малыя не имѣютъ вліянія на предѣлъ суммы; по этому объемъ V выражается двойнымъ интеграломъ:

$$\iint F(a,b)\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right)da\,db,$$

распространяемымъ на всѣ значенія a и b, удовлетворяющія неравенству: $\varphi(\theta(a,b),\ \xi(a,b))<0$.

502. Замѣнимъ **прямоугольныя координаты полярными**, при полюсѣ въ началѣ координатъ и полярной оси совпадающей съ осью OX. Если первыя x и y, а послѣднія r и φ, то:

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\ \ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\ \ \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi,\ \ \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial r}=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r,$$

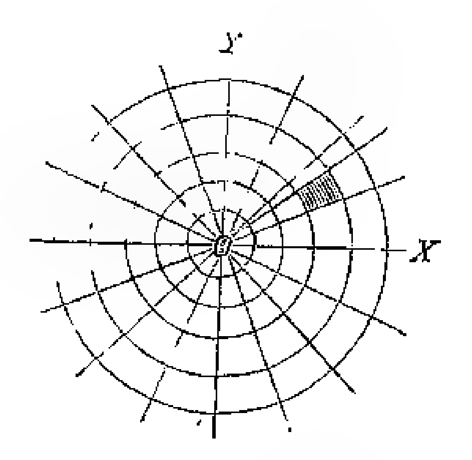
$$\iint f(x,y)\,dx\,dy=\iint f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Выключая изъ уравненій, связывающихъ прямоугольныя координаты съ полярными, сначала φ, потомъ r, получимъ уравненія въ прямоугольныхъ координатахъ тѣхъ линій, которыми при полярныхъ координатахъ, плоскость XY разбивается на элементы; уравненія эти:

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (r \text{ перемѣнный параметръ})$$

$$y=x\operatorname{tg}\varphi \qquad (\varphi \text{ перемѣнный параметръ}).$$

Отсюда видимъ, что одна изъ системъ разбивающихъ линій есть система окружностей круговъ, имѣющихъ общій центръ въ началѣ координатъ, а другая—система прямыхъ линій, проходящихъ чрезъ начало координатъ. Элементарная площадь между этими линіями, если



принять ее за параллелограммъ, въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ прямоугольникъ, котораго стороны: dr и $rd\varphi$; она заключается между окружностями, опредѣляемыми радіусами r и $r+dr$, и прямыми, опредѣляемыми долготами φ и $\varphi+d\varphi$.

503. Объемъ тѣла, ограниченнаго поверхностью $z=e^{-(x^2+y^2)}$ и плоскостью XY выражается двойнымъ интеграломъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\,,$$

который, какъ выше видѣли, равенъ π. Найдемъ его, преобразовывая послѣдній интегралъ введеніемъ полярныхъ координатъ. Обозначая искомый объемъ черезъ V, имѣемъ:

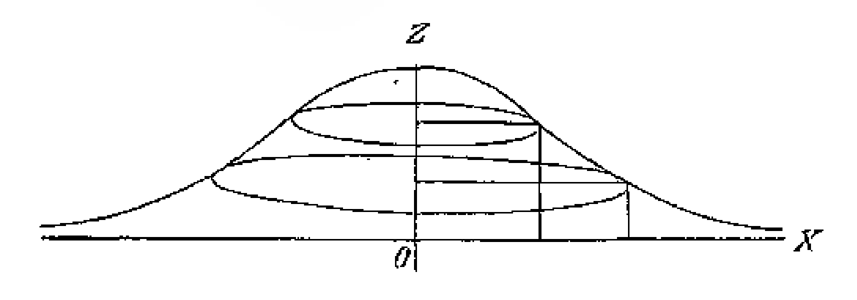
$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\,e^{-r^2}\,dr\,d\varphi\,;$$

а такъ какъ:

$$\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr=\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)_0^{\infty}=\frac{1}{2}, \quad \text{то:}$$

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=\pi.$$

Разсматриваемое тѣло есть тѣло вращенія, происходящее отъ обращенія кривой: $z=e^{-x^2}$ около оси OZ; по этому объемъ его можно найти и одиночнымъ интегрированіемъ:



$$V = \pi \int_0^1 x^2\, dz = -\pi \int_0^1 lz\, dz = \pi\,,$$

или:

$$V = \pi \int_\infty^0 x^2 z'_x\, dx = -2\pi \int_\infty^0 x^3 e^{-x^2}\, dx = \pi \int_0^\infty t e^{-t}\, dt = \pi.$$

504. Площадь эллипса можно выразить двойнымъ интеграломъ $\int\int dx\, dy$, распространяя его на всѣ значенія x и y, удовлетворяющія неравенству: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 < 0$ *).

Введемъ новыя перемѣнныя u и φ, и свяжемъ ихъ съ x и y уравненіями:

$$x = au \cos\varphi\,,\ \ y = bu \sin\varphi\,;$$

тогда:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a \cos\varphi\,,\ \frac{\partial y}{\partial u} = b \sin\varphi\,,\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -au \sin\varphi\,,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = bu \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial u} = abu \cos^2\varphi + abu \sin^2\varphi = abu$$

$$\text{площ. эллипса} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abu\, du\, d\varphi = ab\int_0^{2\pi}\left[d\varphi \int_0^1 u\, du\right] = \pi ab.$$

Уравненія линій, которыми въ этомъ случаѣ площадь эллипса дѣлится на элементы, въ прямоугольныхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2 \qquad (u \text{ перем. параметръ})$$

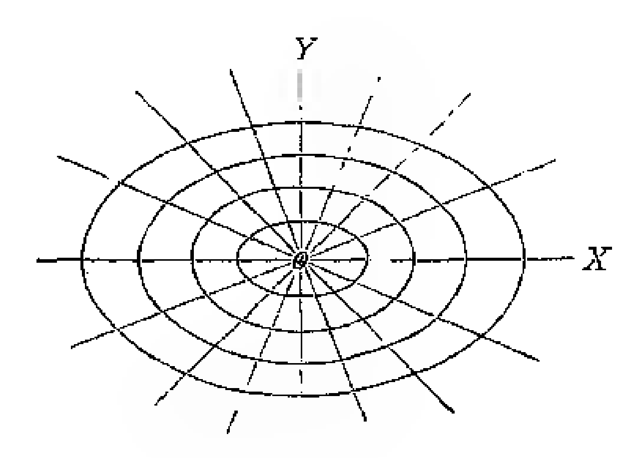
$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi \qquad (\varphi \text{ перем. параметръ}).$$

Изъ нихъ видимъ, что одну систему этихъ линій представляютъ подобные между собою эллипсы, которыхъ общій центръ въ началѣ координатъ, а оси на осяхъ координатъ, а другую — прямыя, проходящія чрезъ начало координатъ. Полуоси эллипсовъ (au и bu) про-

---

*) Такимъ же интеграломъ выражается объемъ прямаго цилиндра, котораго основаніе — эллипсъ съ полуосями a и b, а высота — единица.

порціональны a и b, и измѣняются — однѣ отъ 0 до a, другія отъ 0 до b.



505. **Объемъ эллипсоида** можно выразить двойнымъ интеграломъ:

$$2c\iint\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy\,,\qquad (b\ n^0\ 493).$$

распространяя его на всѣ значенія x и y, для которыхъ:

$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>0.$$

Связывая x и y съ новыми перемѣнными u и φ уравненіями:

$$x=au\cos\varphi,\ \ y=bu\sin\varphi\,,$$

находимъ:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial u}=abu,\ \ \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\sqrt{1-u^2},$$

$$\text{объемъ эллипсоида}=2a\,bc\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,du\,d\varphi=\frac{4}{3}\pi a\,bc.$$

Объемъ тѣла, ограниченнаго плоскостью XY, **шаровою поверхностью:** $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ **и цилиндрическою:** $x^2+y^2-Rx=0$, (c n⁰ 493) можно выразить двойнымъ интеграломъ:

$$\iint\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

распространяя его на всѣ x и y, для которыхъ: $x^2+y^2-Rx<0$, или иначе говоря: на всю площадь круга: $x^2+y^2-Rx=0$.

Введемъ полярныя координаты r и φ:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ \sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-r^2};$$

для предѣловъ интегрированія по r имѣемъ:

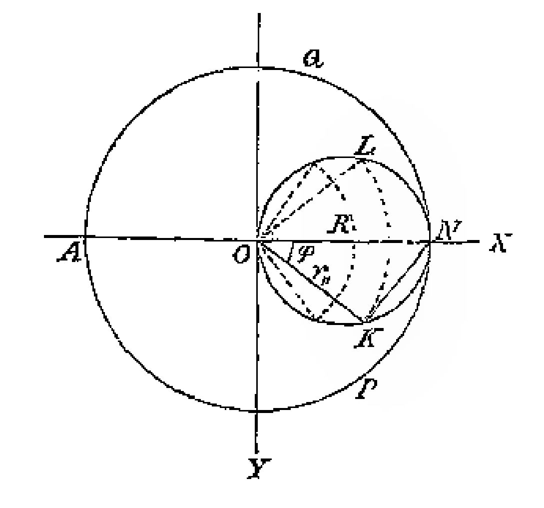
$$r^2-Rr\cos\varphi=0,\ \text{откуда:}\ r_1=0,\ r_{11}=R\cos\varphi;$$

для предѣловъ интегрированія по φ сравниваемъ r_1 съ r_{11}; получимъ: $R\cos\varphi=0$, откуда: $\cos\varphi=0$; стало-быть: $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}, \varphi_{11}=+\frac{\pi}{2}$ *). И такъ:

$$\text{искомый объемъ}\ V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\,d\varphi.$$

$$\text{Но:}\ \int_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2-r^2}\,dr=-\left[\frac{(R^2-r^2)\sqrt{R^2-r^2}}{3}\right]_0^{R\cos\varphi}=\frac{R^3}{3}(1-\sin^3\varphi);$$

*) Эти предѣлы представляются и сами собою на чертежѣ. Пусть $NPAQ$ и $NKOL$ сѣченія шаровой и цилиндрической поверхностей съ плоскостью XY. Сѣченія эти — круги; первому R служитъ радіусомъ, второму — діаметромъ. Собирая элементарные объемы, стоящіе на второмъ кругѣ, по направленію радіуса вектора при одной и той же долготѣ φ, видимъ, что радіусъ векторъ измѣняется въ границахъ отъ 0 до $r_{11}=OK=R\cos\varphi$. Затѣмъ чтобы это сложеніе элементовъ было сдѣлано по направленіямъ всѣхъ радіусовъ векторовъ, соотвѣтствующихъ точкамъ окружности $NKOL$, долготѣ слѣдуетъ давать всѣ значенія отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.



по этому:

$$V=\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi=\frac{2R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi R^3}{3}-\frac{4}{9}R^3.$$

Тоже было выведено другимъ путемъ въ n⁰ 493.

Часть MN **шаровой поверхности** $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, **отдѣляемая отъ нея цилиндрическою:** $x^2+y^2-Rx=0$, (n⁰ 496, черт. *c* n⁰ 493) равна:

$$2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\varphi}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}}=2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,d\varphi=\pi R^2-2R^2.$$

506. Преобразуемъ интегралъ $\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$ (*величина поверхности*) **въ другой введенiемъ полярныхъ координатъ:**

$$\left.\begin{array}{l}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{array}\right\}p=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r},\quad q=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r},$$

$$1+p^2+q^2=1+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2;$$

$$\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\int\int\sqrt{r^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\,dr\,d\varphi.$$

Новымъ перемѣннымъ соотвѣтствуютъ, конечно, и новые предѣлы интегрированiй.

Примѣнимъ эту формулу къ послѣднему вопросу n⁰ 505:

$$z^2=R^2-r^2 \text{ (уравн. шаров. поверхности)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=-\frac{r}{z}=-\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,$$

$$\sqrt{r^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}};$$

$$\text{велич. поверхн.}=R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\varphi}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}}=\pi R^2-2R^2.$$

Предѣлы интегрированiй даетъ уравненiе цилиндрической поверхности: $r^2-Rr\cos\varphi=0$.

Преобразованія тройныхъ интеграловъ.

507. **Данъ тройной интегралъ:**

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

распространяемый на всѣ значенія x, y и z, удовлетворяющія неравенству:

$$\varphi(x, y, z) < 0\,;$$

требуется введеніемъ новыхъ перемѣнныхъ преобразовать его въ другой интегралъ.

Замѣнимъ x новою перемѣнною a, которую свяжемъ съ x уравненіемъ:

$$x = \psi_1(a, y, z), \tag{1}$$

тогда:

$$dx = \frac{\partial \psi_1}{\partial a}\, da\,,$$

и потому, обозначая $f\big(\psi_1(a, y, z),\ y, z\big)$ чрезъ $f_1(a, y, z)$, имѣемъ:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint f_1(a, y, z)\, \frac{\partial \psi_1}{\partial a}\, da\, dy\, dz.$$

Послѣдній интегралъ распространяется на всѣ значенія a, y и z, удовлетворяющія неравенству: $\varphi_1(a, y, z) < 0$, въ которомъ $\varphi_1(a, y, z)$ есть $\varphi\big(\psi_1(a, y, z),\ y,\ z\big)$.

Далѣе, введеніемъ вмѣсто y перемѣнной b, связанной съ y уравненіемъ:

$$y = \psi_{11}(a, b, z)\,, \tag{2}$$

изъ котораго:

$$dy = \frac{\partial \psi_{11}}{\partial b}\, db\,,$$

мы приведемъ интегралъ къ слѣдующему:

$$\iiint f_{11}(a, b, z) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial a}\right) \frac{\partial \psi_{11}}{\partial b}\, da\, db\, dz\,,$$

гдѣ: $f_{11}(a, b, z) = f_1\big(a, \psi_{11}(a, b, z), z\big)$, $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial a}\right) = \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial a}\right]_{y = \psi_{11}(a, b, z)}$.

Наконецъ, вводя c вмѣсто z, связывая ихъ уравненіемъ:

$$z = \theta(a, b, c), \tag{3}$$

которое даетъ:

$$dz = \frac{\partial\theta}{\partial c} dc,$$

получимъ:

$$\iiint F(a, b, c)\left(\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial a}\right)\right)\left(\frac{\partial\psi_{11}}{\partial b}\right)\frac{\partial\theta}{\partial c}\, da\, db\, dc,$$

гдѣ: $F(a, b, c) = f_{11}(a, b, \theta(a, b, c))$, а $\left(\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial a}\right)\right)$ и $\left(\frac{\partial\psi_{11}}{\partial b}\right)$ выражаютъ $\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial a}\right)$ и $\frac{\partial\psi_{11}}{\partial b}$ съ замѣною z функціею $\theta(a, b, c)$.

Уравненіе (3) выражаетъ z въ новыхъ перемѣнныхъ a, b и c; а съ помощію (1), (2) и (3), мы и x, и y выразимъ въ a, b и c. Пусть эти послѣднія функціи ψ и ξ; стало-быть:

$$x = \psi(a, b, c),\ y = \xi(a, b, c),\ z = \theta(a, b, c).$$

Функціи ψ, ξ и θ независимы, и по этому дифференціальный опредѣлитель ихъ не 0.

$F(a, b, c)$ можно получить изъ $f(x, y, z)$, подставляя въ f на мѣсто x, y и z функціи ψ, ξ и θ.

Множители $\left(\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial a}\right)\right)$ и $\left(\frac{\partial\psi_{11}}{\partial b}\right)$ слѣдуетъ выразить въ a, b и c. Это мы сдѣлаемъ, дифференцируя (1) по a, b и c, (2) по b и c, разсматривая при этомъ x, y и z какъ функціи a, b и c:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial\psi_1}{\partial a} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} \tag{4}$$

$$\frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b} \tag{5}$$

$$\frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c} \tag{6}$$

$$\frac{\partial y}{\partial b} = \frac{\partial\psi_{11}}{\partial b} + \frac{\partial\psi_{11}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b} \tag{7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial\psi_{11}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c} \tag{8}$$

(5) и (6) даютъ:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=\frac{\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}}{\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}},\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z}=\frac{\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}}{\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}};$$

а изъ (4) имѣемъ:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial a}=\frac{\partial x}{\partial a}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a};$$

слѣдовательно:

$$\left(\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial a}\right)\right)=\frac{\frac{\partial x}{\partial a}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right)+\frac{\partial y}{\partial a}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right)+\frac{\partial z}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right)}{\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}};$$

а такъ какъ (7) и (8) даютъ:

$$\left(\frac{\partial\psi_{11}}{\partial b}\right)=\frac{\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}}{\frac{\partial z}{\partial c}},$$

то:

$$\left(\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial a}\right)\right)\left(\frac{\partial\psi_{11}}{\partial b}\right)\frac{\partial\theta}{\partial c}=\frac{\partial x}{\partial a}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right)+\frac{\partial y}{\partial a}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right)+\frac{\partial z}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right).$$

Послѣднее выраженіе есть дифференціальный опредѣлитель функцій ψ, ξ и θ, которыми перемѣнныя x, y и z выражаются въ новыхъ перемѣнныхъ a, b и c. Обозначимъ этотъ опредѣлитель чрезъ $D\left(\pm\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right)$.

И такъ:

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint F(a,b,c)\;D\left(\pm\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right)da\,db\,dc.$$

Послѣдній тройной интегралъ распространяется на всѣ значенія a, b и c, удовлетворяющія неравенству:

$$\varphi\left(\psi(a,b,c),\ \xi(a,b,c),\ \theta(a,b,c)\right)<0.$$

508. Другой пріемъ. Дифференцируя уравненія:

$$x=\psi(a,b,c),\ y=\xi(a,b,c),\ z=\theta(a,b,c),$$

получимъ:

$$dx = \frac{\partial\psi}{\partial a}da + \frac{\partial\psi}{\partial b}db + \frac{\partial\psi}{\partial c}dc,$$

$$dy = \frac{\partial\xi}{\partial a}da + \frac{\partial\xi}{\partial b}db + \frac{\partial\xi}{\partial c}dc,$$

$$dz = \frac{\partial\theta}{\partial a}da + \frac{\partial\theta}{\partial b}db + \frac{\partial\theta}{\partial c}dc.$$

При интегрированіи по x, слѣдуетъ y и z считать постоянными, и стало-быть dy и dz нолями; по этому:

$$dx = \frac{\partial\psi}{\partial a}da + \frac{\partial\psi}{\partial b}db + \frac{\partial\psi}{\partial c}dc,$$

$$0 = \frac{\partial\xi}{\partial a}da + \frac{\partial\xi}{\partial b}db + \frac{\partial\xi}{\partial c}dc,$$

$$0 = \frac{\partial\theta}{\partial a}da + \frac{\partial\theta}{\partial b}db + \frac{\partial\theta}{\partial c}dc,$$

откуда:

$$db = \frac{-\frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial\theta}{\partial c} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\theta}{\partial a}}{\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\theta}{\partial c} - \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\theta}{\partial b}}da, \quad dc = \frac{-\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\theta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial\theta}{\partial b}}{\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\theta}{\partial c} - \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\theta}{\partial b}}da,$$

$$dx = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\theta}{\partial c} - \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\theta}{\partial b}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial b}\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\theta}{\partial a} - \frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial\theta}{\partial c}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial c}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial\theta}{\partial b} - \frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)}{\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\theta}{\partial c} - \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\theta}{\partial b}}da$$

$$= \frac{D\left(\pm\frac{\partial\psi}{\partial a}\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\theta}{\partial c}\right)}{\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\theta}{\partial c} - \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\theta}{\partial b}}da.$$

Замѣняя dx этимъ послѣднимъ выраженіемъ, мы можемъ подъинтегральную функцію разсматривать, какъ функцію a, y и z. При интегрированіи по y, слѣдуетъ a и z считать постоянными, и стало-быть da и dz нолями; по этому:

$$dy = \frac{\partial\xi}{\partial b}db + \frac{\partial\xi}{\partial c}dc, \quad 0 = \frac{\partial\theta}{\partial b}db + \frac{\partial\theta}{\partial c}dc,$$

откуда:

$$dc = -\frac{\frac{\partial\theta}{\partial b}}{\frac{\partial\theta}{\partial c}}db, \quad dy = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\theta}{\partial c} - \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\theta}{\partial b}}{\frac{\partial\theta}{\partial c}}db.$$

Теперь, замѣняя dy найденнымъ выраженіемъ, станемъ разсматривать подъинтегральную функцію, какъ функцію a, b и z. При интегрированіи по z, считая a и b постоянными, и стало-быть da и db нолями, имѣемъ:

$$dz = \frac{\partial\theta}{\partial c} dc.$$

Замѣняя dz послѣднимъ выраженіемъ, мы произведеніе $dx\, dy\, dz$ приведемъ къ произведенію: $D\left(\pm \frac{\partial\psi}{\partial a} \frac{\partial\xi}{\partial b} \frac{\partial\theta}{\partial c}\right) da\, db\, dc.$

Слѣдовательно:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint F(a, b, c)\, D\left(\pm \frac{\partial\psi}{\partial a} \frac{\partial\xi}{\partial b} \frac{\partial\theta}{\partial c}\right) da\, db\, dc$$

509. **Съ геометрической точки зрѣнія** интегралъ

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

распространяемый на всѣ значенія x, y и z, удовлетворяющія неравенству $\varphi(x, y, z) < 0$, можно разсматривать, какъ предѣлъ суммы произведеній элементарныхъ объемовъ $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ на значенія функціи $f(x, y, z)$ для точекъ внутри тѣла, ограниченнаго поверхностью $\varphi(x, y, z) = 0$. При этомъ элементарные объемы получаются отъ разсѣченія тѣла тремя системами плоскостей, соотвѣтственно паралельныхъ плоскостямъ координатъ. Но разбивать тѣло на элементы можно и не плоскостями, а вообще какими нибудь поверхностями; и потому вообразимъ три системы поверхностей, уравненія которыхъ пусть будутъ:

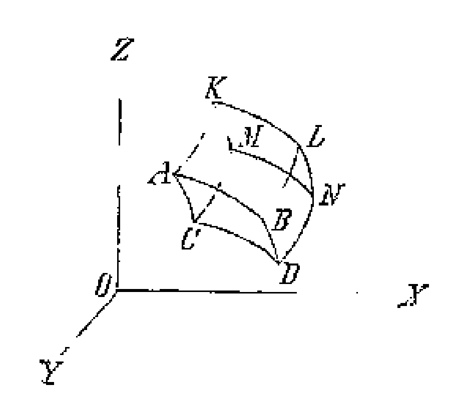
$$\zeta_{I}(x, y, z, a) = 0,\ \zeta_{II}(x, y, z, b) = 0,\ \zeta_{III}(x, y, z, c) = 0.$$

Перемѣнные параметры a, b и c можемъ разсматривать, какъ криволинейныя координаты, — координаты, опредѣляющія положенія точекъ пересѣченіями трехъ кривыхъ поверхностей. Если криволинейные координаты точки даны, то, съ помощію уравненій: $\zeta_{I} = 0$, $\zeta_{II} = 0$ и $\zeta_{III} = 0$, мы найдемъ и прямолинейныя ея координаты, и наоборотъ: по даннымъ x, y и z, найдемъ a, b и c. Пусть эти уравненія, по разрѣшеніи ихъ относительно x, y и z, даютъ:

$$x = \psi(a, b, c),\ y = \xi(a, b, c),\ z = \theta(a, b, c).$$

Вообразимъ по парѣ смежныхъ поверхностей каждой системы.

Параметры первой пары пусть a и $a+da$, второй: b и $b+db$, третьей: c и $c+dc$ (da, db и dc безконечно-малыя одного порядка).



Эти шесть поверхностей, взаимно пересѣкаясь, ограничиваютъ элементарный объемъ AN. Если a, b и c параметры его поверхностей AM, AL и AD, то $a+da$, $b+db$ и $c+dc$ будутъ параметрами поверхностей BN, CN и KN; стало-быть криволинейныя координаты точекъ взаимнаго пересѣченія этихъ поверхностей будутъ слѣдующія:

точки $A : a, b, c$	точки $K : a, b, c+dc$
$B : a+da, b, c$	$L : a+da, b, c+dc$
$C : a, b+db, c$	$M : a, b+db, c+dc$
$D : a+da, b+db, c$	$N : a+da, b+db, c+dc$;

а прямолинейныя координаты, если откинуть въ нихъ безконечно-малыя выше перваго порядка:

точки $A : x, y, z$

$$B : x+\frac{\partial x}{\partial a}da,\ y+\frac{\partial y}{\partial a}da,\ z+\frac{\partial z}{\partial a}da$$

$$C : x+\frac{\partial x}{\partial b}db,\ y+\frac{\partial y}{\partial b}db,\ z+\frac{\partial z}{\partial b}db$$

$$D : x+\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db,\ y+\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial b}db,\ z+\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial b}db$$

$$K : x+\frac{\partial x}{\partial c}dc,\ y+\frac{\partial y}{\partial c}dc,\ z+\frac{\partial z}{\partial c}dc$$

$$L : x+\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial c}dc,\ y+\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial c}dc,\ z+\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial c}dc$$

$$M : x+\frac{\partial x}{\partial b}db+\frac{\partial x}{\partial c}dc,\ y+\frac{\partial y}{\partial b}db+\frac{\partial y}{\partial c}dc,\ z+\frac{\partial z}{\partial b}db+\frac{\partial z}{\partial c}dc$$

$$N: x + \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc,\ y + \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc,$$

$$z + \frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc.$$

Отсюда, принимая линіи AB, AC и т. д. за прямыя, имѣемъ:

$$AB = CD = KL = MN,\ AC = BD = KM = LN,$$

$$AK = BL = CM = DN.$$

Теперь докажемъ, что точки A, B, C и D (въ выраженіяхъ координатъ которыхъ мы пренебрегли безконечно-малыми выше перваго порядка) можно разсматривать лежащими въ одной плоскости.

Дѣйствительно: уравненіе плоскости, содержащей на себѣ точки A, B и C, слѣдующее:

$$P(X-x) + Q(Y-y) + R(Z-z) = 0,$$

гдѣ коэффиціенты удовлетворяютъ условіямъ:

$$P\frac{\partial x}{\partial a}da + Q\frac{\partial y}{\partial a}da + R\frac{\partial z}{\partial a}da = 0$$

$$P\frac{\partial x}{\partial b}db + Q\frac{\partial y}{\partial b}db + R\frac{\partial z}{\partial b}db = 0;$$

а такъ какъ изъ этихъ условій имѣемъ:

$$P\left(\frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db\right) + Q\left(\frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db\right) + R\left(\frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db\right) = 0,$$

то отсюда заключаемъ, что и точка D принадлежитъ той же плоскости.

Также докажется, что и поверхности KN, AM, BN, AL и CN можно принять за плоскія. Вслѣдствіе этого тѣло AN принимаемъ за параллелепипедъ; тогда объемъ его легко найдется по координатамъ вершинъ A, B, C и K; онъ будетъ абсолютною величиною произведенія:

$$\left[\frac{\partial x}{\partial a}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right) + \frac{\partial y}{\partial a}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right) + \frac{\partial z}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right)\right] da\,db\,dc,$$

или:

$$D\left(\pm\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right)da\,db\,dc\,;$$

а произведеніе объема на соотвѣтствующее значеніе $f(x, y, z)$ будетъ:

$$F(a, b, c)\,D\left(\pm\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right)da\,db\,dc\,,$$

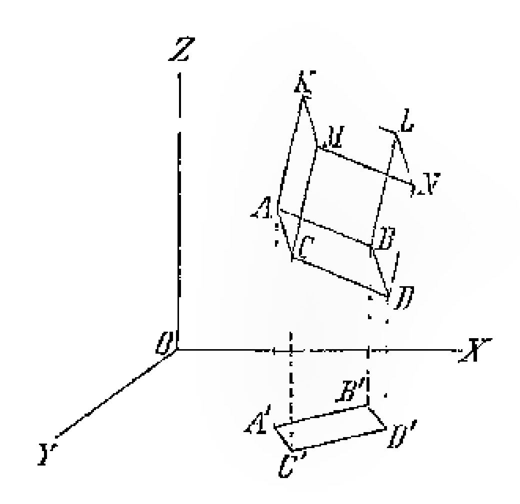
гдѣ:

$$F(a, b, c) = f\big(\psi(a, b, c),\ \xi(a, b, c),\ \theta(a, b, c)\big).$$

Дѣйствительная величина элементарнаго объема, а стало-быть и произведенія его на $f(x, y, z)$, отличается отъ найденной на безконечно-малую величину выше третьяго порядка. Но предѣлы суммъ, какъ дѣйствительныхъ, такъ и найденныхъ произведеній одинаковы, и каждый изъ этихъ предѣловъ приводится къ тройному интегралу:

$$\iiint F(a, b, c)\,D\left(\pm\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right)da\,db\,dc.$$

Приведемъ выводъ выраженія объема параллелепипеда AN въ разностяхъ координатъ четырехъ вершинъ его: $A(x, y, z)$, $B(x+h, y+k, z+l)$, $C(x+h_1, y+k_1, z+l_1)$ и $K(x+h_{11}, y+k_{11}, z+l_{11})$.



Проэкція параллелограмма $ABDC$ на плоскости XY — параллелограммъ $A'B'D'C'$. Координаты точки A': x, y, 0, точки B': $x+h$,

$y+k$, 0, точки C': $x+h_1$, $y+k_1$, 0. Площ. $A'B'D'C'$ = абс. вел. $(lk_1 - h_1 k)$.

Уравненіе плоскости AD: $P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0$, гдѣ P, Q и R удовлетворяютъ условіямъ:

$$Ph + Qk + Rl = 0,\ Ph_1 + Qk_1 + Rl_1 = 0,$$

откуда:

$$\frac{P}{kl_1 - k_1 l} = \frac{Q}{lh_1 - l_1 h} = \frac{R}{hk_1 - h_1 k}.$$

Косинусъ угла наклоненія плоскости AD къ плоскости XY равенъ абсолютной величинѣ отношенія: $\frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$.

площ. $ABDC$ = абс вел. $\frac{(hk_1 - h_1 k)\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{R}$,

разст. отъ точки k до плоскости AD = абс. вел. $\frac{Ph_{11}+Qk_{11}+Rl_{11}}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$,

объемъ AN = абс. вел. $\left[\frac{Ph_{11}+Qk_{11}+Rl_{11}}{R}(hk_1 - h_1 k)\right]$ =

= абс. вел. $\left[(kl_1 - k_1 l)h_{11} + (lh_1 - l_1 h)k_{11} + (hk_1 - h_1 k)l_{11}\right]$

= абс. вел. $\left[h(k_1 l_{11} - k_{11} l_1) + k(l_1 h_{11} - l_{11} h_1) + l(h_1 k_{11} - h_{11} k_1)\right]$.

510. Объемъ эллипсоида можно выразить тройнымъ интеграломъ $\iiint dx\,dy\,dz$, распространяя его на всѣ точки внутри эллипсоида, т. е. на всѣ значенія x, y и z, для которыхъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 < 0.$$

Введемъ вмѣсто x, y и z новыя перемѣнныя u, φ и ξ, и свяжемъ ихъ съ x, y и z уравненіями:

$$x = au\sin\varphi\cos\xi,\ y = bu\sin\varphi\sin\xi,\ z = cu\cos\varphi; \qquad (A)$$

тогда:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=a\sin\varphi\cos\xi,\ \frac{\partial y}{\partial u}=b\sin\varphi\sin\xi,\ \frac{\partial z}{\partial u}=c\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=au\cos\varphi\cos\xi,\ \frac{\partial y}{\partial\varphi}=bu\cos\varphi\sin\xi,\ \frac{\partial z}{\partial\varphi}=-cu\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=-au\sin\varphi\sin\xi,\ \frac{\partial y}{\partial\xi}=bu\sin\varphi\cos\xi,\ \frac{\partial z}{\partial\xi}=0,$$

$$D\left(\pm\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\xi}-\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial x}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial x}{\partial\xi}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial\varphi}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$=abcu^2(\sin^3\varphi\cos^2\xi+\sin\varphi\cos^2\varphi\cos^2\xi+\sin^3\varphi\sin^2\xi+\sin\varphi\cos^2\varphi\sin^2\xi)=$$

$$=abcu^2\sin\varphi\,;$$

$$\text{объемъ эллипсоида}=abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 u^2\sin\varphi\,du\,d\varphi\,d\xi=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Уравненія поверхностей, разбивающихъ эллипсоидъ на элементы, и отвѣчающихъ параметрамъ u, φ и ξ, найдутся исключеніями изъ уравненій (A) спачала φ и ξ, потомъ u и ξ, и наконецъ u и φ. Эти исключенія приведутъ къ уравненіямъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u^2 \qquad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\operatorname{tg}^2\varphi \qquad (2)$$

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}\operatorname{tg}\xi \qquad (3)$$

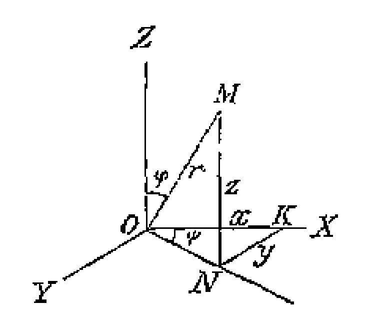
Въ уравненіи (1) заключаются поверхности эллипсоидовъ, имѣющихъ общій центръ въ началѣ координатъ, а оси на осяхъ координатъ. Полуоси этихъ эллипсоидовъ, au, bu и cu, измѣняются отъ 0 до a, отъ 0 до b, и отъ 0 до c, при измѣненіи параметра u отъ 0 до 1. Въ уравненіи (2) заключаются коническія поверхности съ общей вершиной въ началѣ координатъ, а въ уравненіи (3) плоскости, проходящія чрезъ ось OZ. Стало-быть здѣсь поверхности, разбивающія эллипсоидъ на элементы, эллипсоидальныя, коническія и плоскія.

Такъ какъ въ разбивающихъ эллипсоидальныхъ поверхностяхъ полуоси пропорціональны a, b и c, то онѣ подобны.

Если въ неравенство: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1<0$ подставимъ вмѣсто x, y и z выраженія ихъ въ новыхъ перемѣнныхъ u, φ и ξ, то получимъ неравенство: $u^2-1<0$. Оно показываетъ, что u измѣняется въ границахъ 0 и 1, и стало-быть предѣлы интегрированія по u должны быть 0 и 1 (отрицательныхъ значеній u мы не приписываемъ).

Въ неравенство $u^2-1<0$ параметры φ и ξ совсѣмъ не входятъ; значитъ—ихъ слѣдуетъ провести по всѣмъ значеніямъ, соотвѣтственно всѣмъ положеніямъ разсѣкающихъ поверхностей, конической и плоской. Первая поверхность пройдетъ чрезъ всѣ положенія, когда φ будетъ измѣняться отъ 0 до π, а вторая пройдетъ чрезъ всѣ положенія, когда ξ будетъ измѣняться отъ 0 до 2π *). Слѣдовательно предѣлы интегрированія по φ должны быть 0 и π, а по ξ: 0 и 2π.

511. Преобразуемъ интегралъ $\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ введеніемъ полярныхъ координатъ.



x, y и z прямоуг. коорд. точки M,

r, φ и ψ полярныя;

r радіусъ векторъ,

φ дополненіе широты,

ψ долгота.

$$x=r\sin\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\sin\psi,\quad z=r\cos\varphi\,;$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\sin\varphi\cos\psi,\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}=r\cos\varphi\cos\psi,\quad \frac{\partial x}{\partial\psi}=-r\sin\varphi\sin\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi\sin\psi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi\sin\psi,\quad \frac{\partial y}{\partial\psi}=r\sin\varphi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\cos\varphi,\qquad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi,\qquad \frac{\partial z}{\partial\psi}=0\,;$$

---

*) Коническія поверхности мы здѣсь разсматриваемъ простирающимися въ одну сторону отъ вершины, а плоскости — въ одну сторону отъ оси OZ.

$$D\left(\pm\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)=\frac{\partial x}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \psi}-\frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial y}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \psi}-\frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial z}{\partial r}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi}-\frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)$$

$$=r^2\sin\varphi\,(\sin^2\varphi\cos^2\psi+\sin^2\varphi\sin^2\psi+\cos^2\varphi)=r^2\sin\varphi\,;$$

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint F(r,\varphi,\psi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi,$$

гдѣ: $$F(r,\varphi,\psi)=f(r\sin\varphi\cos\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\varphi).$$

Выключая изъ уравненій, связывающихъ x, y и z съ r, φ и ψ, сначала φ и ψ, потомъ r и ψ, и за тѣмъ r и φ, получимъ уравненія:

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\quad x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\varphi,\quad y=x\operatorname{tg}\psi.$$

Въ первомъ изъ нихъ заключаются шаровыя поверхности съ общимъ центромъ въ началѣ координатъ (r радіусъ); во второмъ — коническія съ общей вершиной въ началѣ координатъ (φ уголъ между производящею и осью конуса); въ третьемъ — плоскости, проходящія чрезъ ось OZ (ψ уголъ между плоскостью и плоскостью XZ). Если взаимнымъ пересѣченіемъ этихъ трехъ измѣняющихся поверхностей (при измѣненіяхъ r, φ и ψ) пожелаемъ пройти чрезъ всѣ точки пространства, то надобно r измѣнять отъ 0 до ∞, φ отъ 0 до π, и ψ отъ 0 до 2π. При этомъ коническія поверхности простираются отъ вершины въ одну сторону, а плоскости отъ оси OZ въ одну сторону.

Если вообразимъ двѣ смежныя шаровыя поверхности, опредѣляемыя параметрами r и $r+dr$, потомъ двѣ смежныя коническія съ параметрами φ и $\varphi+d\varphi$, и двѣ смежныя плоскости съ параметрами ψ и $\psi+d\psi$, то элементарный объемъ, заключающійся между этими шестью поверхностями, если откинуть въ немъ безконечно-малыя выше третьяго порядка, будетъ:

$$D\left(\pm\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)dr\,d\varphi\,d\psi \quad\text{или}\quad r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

Въ этомъ легко убѣдиться и независимо отъ общей теоріи. Дѣйствительно: если построимъ этотъ элементарный объемъ, и примемъ его за параллелепипедъ, то увидимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ

этотъ параллелепипедъ будетъ прямоугольный, и ребра его будутъ: $r\,d\varphi$, $r\sin\varphi\,d\psi$ и dr, а стало-быть объемъ: $r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi$. Ребро $r\,d\varphi$ будетъ въ пересѣченіи шаровой поверхности r и плоскости ψ между коническими φ и $\varphi+d\varphi$; ребро $r\sin\varphi\,d\psi$ въ пересѣченіи шаровой поверхности r и конической φ между плоскостями ψ и $\psi+d\psi$; ребро dr въ пересѣченіи конической поверхности φ съ плоскостью ψ между шаровыми поверхностями r и $r+dr$.

512. **Найдемъ предѣлъ суммы произведеній элементарныхъ объемовъ, наполняющихъ шаръ, на квадраты разстояній этихъ объемовъ отъ центра шара** *). Пусть R радіусъ шара. Уравненіе поверхности шара относительно его центра (при осяхъ прямоугольныхъ) будетъ: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$. Квадратъ разстоянія точки (x, y, z) отъ начала координатъ (центра шара): $x^2+y^2+z^2$. Стало-быть вопросъ приводится къ отысканію тройнаго интеграла

$$\iiint (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz\,,$$

распространяемаго на всѣ значенія x, y и z, удовлетворяющія неравенству:

$$x^2+y^2+z^2-R^2<0.$$

Обозначимъ этотъ интегралъ чрезъ P, и найдемъ его сперва оставаясь при перемѣнныхъ x, y и z, а потомъ введеніемъ новыхъ перемѣнныхъ — полярныхъ координатъ.

$$P=\int_{-R}^{+R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx=$$

$$=8\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx;$$

*) Моментъ инерціи шара (однороднаго съ плотностью 1) относительно его центра.

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz=\left[(x^2+y^2)z+\frac{z^3}{3}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\frac{2x^2+2y^2+R^2}{3}\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{2x^2+2y^2+R^2}{3}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x^2+2(R^2-x^2)\sin^2\xi+R^2}{3}(R^2-x^2)\cos^2\xi\,d\xi$$

$$=(R^2-x^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3R^2-2(R^2-x^2)\cos^2\xi}{3}\cos^2\xi\,d\xi$$

$$=(R^2-x^2)R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\xi\,d\xi-\frac{2}{3}(R^2-x^2)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\xi\,d\xi=\frac{\pi}{8}(R^4-x^4);$$

$$P=\pi\int_0^R(R^4-x^4)\,dx=\frac{4}{5}\pi R^5=\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{3}{5}R^2=$$

$=$ *произведенію объема шара на* $\frac{3}{5}$ *квадрата его радіуса.*

Теперь введеніемъ полярныхъ координатъ:

$$\left.\begin{aligned}x&=r\sin\varphi\cos\psi\\ y&=r\sin\varphi\sin\psi\\ z&=r\cos\varphi\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2=r^2,\\ &\text{опредѣлитель}=r^2\sin\varphi;\end{aligned}$$

$$P=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R r^4\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi=\frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi=$$

$$=\frac{2R^5}{5}\int_0^{2\pi}d\psi=\frac{4}{5}\pi R^5.$$

513. Предѣлъ суммы произведеній элементарныхъ объемовъ, на-

полняющихъ шаръ, на квадраты разстояній этихъ объемовъ отъ діаметра шара *) можно выразить тройнымъ интеграломъ

$$\iiint (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

распространяя его на всѣ значенія x, y и z, для которыхъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 < 0.$$

(R радіусъ шара, начало координатъ въ центрѣ шара, а діаметръ взятъ тотъ, который идетъ по оси OZ). Обозначая интегралъ этотъ чрезъ P_1 и вводя полярныя координаты, получимъ:

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\varphi,$$

$$P_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \sin^3\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi = \frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\,d\varphi\,d\psi =$$

$$= \frac{2R^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi\,d\psi = \frac{8}{15}\pi R^5 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{2}{5} R^2 =$$

= *произведенію объема шара на* $\frac{2}{5}$ *квадрата его радіуса.*

514. Предѣлъ суммы произведеній элементарныхъ объемовъ, наполняющихъ шаръ, на квадраты разстояній этихъ объемовъ отъ плоскости, проходящей чрезъ центръ шара **). Обозначимъ этотъ предѣлъ чрезъ P_{11}, и примемъ центръ шара (радіусъ его R) за начало координатъ, а послѣднюю плоскость за плоскость XY; тогда P_{11} выразится интеграломъ

$$\iiint z^2\,dx\,dy\,dz,$$

распространеннымъ на всѣ значенія x, y и z, для которыхъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 < 0.$$

---

*) Моментъ инерціи шара (однороднаго съ плотностью 1) относительно его діаметра.

**) Моментъ инерціи шара (однороднаго съ плотностью 1) относительно плоскости, проходящей чрезъ центръ.

$$P_{11}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi=\frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi=-\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\;d\cos\varphi=\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3},$$

$$P_{11}=\frac{2R^5}{15}\int_0^{2\pi}d\psi=\frac{4}{15}\pi R^5=\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{1}{5}R^2=$$

$=$ *произведенію объема шара на* $\frac{1}{5}$ *квадрата его радіуса.*

ИНТЕГРАЛЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ СЪ ДВУМЯ ПЕРЕМѢННЫМИ.

515. Пусть перемѣнныя x и y связаны между собою уравненіемъ, которое, кромѣ этихъ перемѣнныхъ, содержитъ въ себѣ постоянныя произвольныя $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$:

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \qquad (1)$$

Примемъ перемѣнную x за независимую; другая по этому будетъ функція первой, удовлетворяющая уравненію (1). Такъ какъ количествамъ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно приписывать произвольныя значенія, то въ уравненіи (1) заключается безчисленное множество функцій, или, говоря геометрически: уравненію (1) отвѣчаетъ цѣлая система кривыхъ линій, кривыхъ, которыя мы можемъ отнести всѣ къ одной категоріи, и различать одну отъ другой значеніями параметровъ $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Свойство всѣхъ этихъ функцій, а стало-быть и всѣхъ кривыхъ (1), можно выразить уравненіемъ, незаключающимъ параметровъ. Чтобы получить это послѣднее, продифференцируемъ (1) n разъ; получимъ уравненія вида:

$$F_1(x, y, y', C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

$$F_2(x, y, y', y'', C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

$$F_3(x, y, y', y'', y''', C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \qquad (2)$$

. . . .

. . . .

$$F_n(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Выключеніе изъ нихъ и даннаго, всего изъ $n+1$ уравненій, параметровъ $C_1, C_2, \ldots, C_n$, приведетъ къ уравненію вида:

$$f(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (3)$$

Это уравненіе — *дифференціальное* *). Въ немъ нѣтъ параметровъ $C_1, C_2, \ldots, C_n$; стало-быть оно относится ко всѣмъ функціямъ, заданнымъ уравненіемъ (1); другими словами; оно выражаетъ свойство всѣхъ тѣхъ функцій, которыя опредѣляются уравненіемъ (1), или всѣхъ тѣхъ кривыхъ, которыя заключаются въ (1).

Приведемъ примѣръ. Пусть дано уравненіе:

$$y^2 = 2px.$$

Въ немъ заключается безчисленное множество обыкновенныхъ параболъ, имѣющихъ общую ось на оси OX и общую вершину въ началѣ координатъ, но различающихся между собою параметрами $2p$. Если продифференцируемъ его и потомъ исключимъ параметръ, то получимъ уравненіе:

$$y' = \frac{y}{2x},$$

выражающее свойство касательныхъ, общее всѣмъ этимъ параболамъ, — свойство, заключающееся въ томъ, что угловой коэффиціентъ касательной къ каждой изъ нихъ равенъ отношенію ординаты точки касанія къ удвоенной абсциссѣ.

Легко доказать и обратно, что такое свойство касательной принадлежитъ исключительно параболамъ, которыхъ вершины въ началѣ координатъ, а оси—на оси абсциссъ. Дѣйствительно: уравненіе: $y' = \frac{y}{2x}$ даетъ: $\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$, откуда:

---

*) Всякое уравненіе, содержащее въ себѣ производныя или дифференціалы функцій, называютъ *дифференціальнымъ*.

$$2\,ly = lx + lC\,,\ \text{или}\ l(y^2) = l(Cx) \qquad (C\ \text{пост. произвольн.});$$

слѣдовательно:

$$y^2 = Cx.$$

Въ послѣднемъ уравненiи и заключаются всѣ параболы съ общею вершиною въ началѣ координатъ и съ общею осью на оси OX.

Уравненiе (1) по отношенiю къ (3) называютъ *первообразнымъ* или *интеграломъ* уравненiя (3). Порядокъ высшей производной въ дифференцiальномъ уравненiи называютъ *порядкомъ* уравненiя. Дифференцiальное уравненiе (3) n-го порядка.

Если первообразное уравненiе содержитъ одну постоянную произвольную:

$$F(x,\,y,\,C) = 0\,,$$

то для исключенiя ея достаточно продифференцировать его одинъ разъ, и тогда, по исключенiи C, получится дифференцiальное уравненiе перваго порядка: $f(x,\,y,\,y') = 0$.

Если первообразное уравненiе содержитъ двѣ постоянныхъ произвольныхъ:

$$F(x,y,\,C_1\,,C_2) = 0.$$

то, для исключенiя ихъ, продифференцируемъ его два раза.

Результатомъ исключенiя будетъ дифференцiальное уравненiе втораго порядка:

$$f(x,y,y',y'') = 0,$$

и т. д.

Переходъ отъ первообразнаго уравненiя къ соотвѣтствующему ему дифференцiальному очень простъ; онъ требуетъ только дифференцированiй и исключенiй. Обратный переходъ отъ дифференцiальнаго уравненiя къ первообразному, или интегралу дифференцiальнаго, требуетъ особыхъ прiемовъ, которые и составляютъ то, что называютъ *интегрированiемъ* дифференцiальнаго уравненiя.

516. Обратимся къ общему дифференцiальному уравненiю съ двумя перемѣнными:

$$f(x,y,y',y'',y''',\ldots,y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Всякая функція x, которая, будучи подставлена вмѣсто y въ это уравненіе, удовлетворяетъ ему, есть *интегралъ* уравненія; другими словами: интеграломъ уравненія (1) можно назвать всякое связывающее x съ y и не содержащее производныхъ: y', y'', y''', ... уравненіе, изъ котораго вытекаетъ (1). Составить представленіе о существованіи интеграловъ уравненія (1) можно слѣдующимъ разсужденіемъ. Представимъ себѣ уравненіе (1) разрѣшеннымъ относительно высшей производной, т. е. выразимъ изъ него $y^{(n)}$ въ зависимости отъ $x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$; затѣмъ дифференцированіями и замѣненіями всякій разъ $y^{(n)}$ найденнымъ выраженіемъ, мы получимъ и $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, y^{(n+3)}, \ldots$ также въ зависимости отъ $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$. Такимъ образомъ составятся уравненія вида:

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= \varphi\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \\
y^{(n+1)} &= \varphi_1\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \\
y^{(n+2)} &= \varphi_2\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

которыя всѣ вытекаютъ изъ (1)

Пусть функція y и всѣ ея производныя: y', y'', y''', ... сплошныя на пути перемѣнной отъ x_0 до x; тогда эту функцію можно представить разложенною въ слѣдующій рядъ по степенямъ $x - x_0$:

$$
y = y_0 + (x - x_0)\,y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}y_0'' + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}y_0''' + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}y_0^{(n-1)} +
$$

$$
+ \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}y_0^{(n)} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}y_0^{(n+1)} + \frac{(x-x_0)^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}y_0^{(n+2)} + \ldots,
$$

въ которомъ подъ y_0, y_0', y_0'', y_0''', ... мы разумѣемъ значенія y, y', y'', y''', ... при $x = x_0$.

Если хотимъ, чтобы этотъ рядъ выражалъ функцію, удовлетворяющую уравненію (1), а стало-быть и уравненіямъ (2), то необходимо, чтобы значенія производныхъ $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$, ... при $x = x_0$ приводились къ значеніямъ функцій φ, φ_1, φ_2, ... при $x = x_0$, т. е., чтобы было:

$$y_0^{(n)} \;\; = \varphi\left(x_0, y_0; y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$$

$$y_0^{(n+1)} = \varphi_1\left(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$$

$$y_0^{(n+2)} = \varphi_2\left(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$$

. . . .

. . . .,

значенія же $y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$ при $x = x_0$, т. е. $y_0, y_0', y_0'', y_0''', \ldots, y_0^{(n-1)}$ могутъ оставаться произвольными. Пусть эти послѣднія значенія будутъ: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, т. е.:

$$y_0 = a_0,\, y_0' = a_1,\, y_0'' = a_2,\, y_0''' = a_3, \ldots, y_0^{(n-1)} = a_{n-1};$$

тогда, полагая для краткости:

$$\varphi\left(x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\right) = p_0$$

$$\varphi_1\left(x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\right) = p_1$$

$$\varphi_2\left(x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\right) = p_2$$

. . . .

. . . .

и затѣмъ составляя функцію:

$$y = a_0 + (x - x_0)\, a_1 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} a_2 + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3} a_3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} a_{n-1} + \frac{(x-x_0)^n}{1.2.\ldots n} p_0 + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} p_1 + \ldots,$$

мы увидимъ, что эта функція при $x = x_0$ дастъ a_0; ея производныя $y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$ при $x = x_0$ дадутъ: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$; а n-ая производная ея будетъ $\varphi\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$. Дѣйствительно: дифференцируя ее, получимъ:

$$y' = a_1 + (x-x_0)a_2 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} a_3 + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} a_{n-1} + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} p_0 + \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n} p_1 + \ldots$$

$$y''=a_2+(x-x_0)a_3+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)}a_{n-1}+\frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}p_0+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}p_1+\frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}p_2+\ldots$$

. . . .

. . . .

$$y^{(n-1)}=a_{n-1}+(x-x_0)p_0+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}p_1+\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}p_2+\ldots.$$

$$y^{(n)}=p_0+(x-x_0)p_1+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}p_2+\ldots.$$

Подставляя x_0 на мѣсто x въ $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, находимъ:

$$y_0=a_0,\ y_0'=a_1,\ y_0''=a_2,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}=a_{n-1}.$$

По этому:

$$p_0=\varphi(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})=\Big[\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})\Big]_{x=x_0}$$

$$p_1=\varphi_1(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})=\Big[\varphi'(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})\Big]_{x=x_0}$$

$$p_2=\varphi_2(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})=\Big[\varphi''(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})\Big]_{x=x_0}$$

и т. д.

Слѣдовательно, обозначая $\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ чрезъ P, имѣемъ:

$$y^{(n)}=(P)_{x_0}+(x-x_0)(P')_{x_0}+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}(P'')_{x_0}+\ldots$$
$$=P=\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Итакъ видимъ, что функція y, выраженная строкою:

$$a_0+(x-x_0)a_1+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}a_2+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}a_{n-1}+\frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}p_0+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}p_1+\ldots,$$

удовлетворяетъ уравненію (1), и стало-быть служитъ ему интеграломъ. Такъ какъ постоянныя $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ совершенно произвольны, то интеграловъ уравненіе (1) имѣетъ безчисленное множество.

Для поясненія приведемъ частный примѣръ. Пусть дано уравненіе третьяго порядка:

$$y'''+y'=x.$$

Выражая изъ него y''' и дифференцируя, получимъ:

$$y''' = x - y',\ y^{(4)} = 1 - y'',$$

$$y^{(5)} = -y''' = -(x - y'),\ y^{(6)} = -(1 - y''),$$

$$y^{(7)} = y''' = x - y',\ y^{(8)} = 1 - y'',\ \text{и т. д.}$$

Пусть $x_0 = 0$; тогда:

$$y_0''' = y_0^{(7)} = y_0^{(11)} = \ldots = -y_0',$$

$$y_0^{(4)} = y_0^{(8)} = y_0^{(12)} = \ldots = 1 - y_0'',$$

$$y_0^{(5)} = y_0^{(9)} = y_0^{(13)} = \ldots = y_0',$$

$$y_0^{(6)} = y_0^{(10)} = y_0^{(14)} = \ldots = -(1 - y_0'').$$

Слѣдовательно:

$$y = y_0 + xy_0' + \frac{x^2}{1.2}y_0'' - \frac{x^3}{1.2.3}y_0' + \frac{x^4}{1.2.3.4}(1 - y_0'') + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}y_0' - \ldots$$

$$= a_0 - (1 - a_2) + a_1\left[x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right] +$$

$$+ (1 - a_2)\left[1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right] + \frac{x^2}{2},$$

или:

$$y = a_0 - (1 - a_2) + \frac{x^2}{2} + a_1 \sin x + (1 - a_2)\cos x.$$

Входящія сюда постоянныя произвольныя a_0, a_1 и a_2 представляютъ значенія y, y' и y'' при $x = 0$; вмѣсто нихъ можемъ ввести новыя постоянныя произвольныя, полагая:

$$a_0 - (1 - a_2) = C_1,\ a_1 = C_2,\ 1 - a_2 = C_3 \quad *);$$

тогда:

$$y = C_1 + \frac{x^2}{2} + C_2 \sin x + C_3 \cos x.$$

---

*) Изъ этихъ трехъ равенствъ видно, что, распоряжаясь количествами a_0, a_1 и a_2, мы можемъ и C_1, C_2 и C_3 сдѣлать какими угодно.

Чтобы повѣрить, удовлетворяетъ-ли послѣдняя функція данному уравненію, каковы бы ни были постоянныя C_1, C_2 и C_3, — продифференцируемъ ее три раза, затѣмъ найдемъ сумму производныхъ ея перваго и третьяго порядка и посмотримъ, будетъ-ли эта сумма равна x.

$$y' = x + C_2 \cos x - C_3 \sin x,\ y'' = 1 - C_2 \sin x - C_3 \cos x.$$

$$y''' = -C_2 \cos x + C_3 \sin x,\ y''' + y' = x.$$

517. Интегралы уравненія:

$$f(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

которыхъ безчисленное множество, по причинѣ произвольности постоянныхъ a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, можно представить уравненіемъ вида:

$$F(x, y, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = 0,$$

гдѣ постоянныя произвольныя: C_1, C_2, C_3, ..., C_n входятъ такъ, что, распоряжаясь ими, мы можемъ значенія $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ при $x = x_0$ сдѣлать какими угодно. Болѣе n постоянныхъ произвольныхъ интегралъ содержать не можетъ: потому что если-бы ихъ было $n+1$, то, распоряжаясь ими, мы могли-бы при $x = x_0$ сдѣлать какими угодно не только значенія $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, но и $y^{(n)}$, — что невозможно, потому что $y^{(n)}$ выражается въ зависимости отъ $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, а стало-быть и $y_0^{(n)}$ вполнѣ опредѣляется количествами $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$:

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),\ y_0^{(n)} = \varphi(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}).$$

Если въ интегралѣ постояннымъ произвольнымъ C_1, C_2, ..., C_n не приписано никакихъ опредѣленныхъ значеній, то интегралъ называютъ *полнымъ*; въ случаѣ же опредѣленныхъ значеній C_1, C_2, ..., C_n, — *частнымъ*. Полный интегралъ уравненія:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

можно представить въ разныхъ формахъ; но всѣ эти формы приводятся къ одной. Въ самомъ дѣлѣ: пусть:

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{a}$$

$$F_1(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \qquad (b)$$

двѣ разныя формы полнаго интеграла уравненія (1).

Надобно показать, что всѣ функціи y, заключающіяся въ (a), заключаются и въ (b), и наоборотъ. Разрѣшимъ (a) и (b) относительно y, и полученныя функціи развернемъ въ строки по степенямъ $x - x_0$; тогда, употребляя обозначенія n° 516, получимъ для первой изъ этихъ функцій рядъ:

$$a_0 + (x - x_0)a_1 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}a_2 + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}a_3 + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}a_{n-1} +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}\varphi(x_0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\varphi_1(x_0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) + \ldots,$$

а для второй:

$$b_0 + (x - x_0)b_1 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}b_2 + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}b_3 + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}b_{n-1} +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}\varphi(x_0, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\varphi_1(x_0, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) + \ldots,$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ значенія $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, соотвѣтствующія уравненію (a), при $x = x_0$, а $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ значенія $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, соотвѣтствующія (b), также при $x = x_0$. По произвольности постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots, C_n$, мы можемъ, какъ количества $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, такъ и $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, считать произвольными; поэтому двѣ послѣднія строки представляютъ въ сущности одно и тоже; другимя словами: всѣ частные интегралы, заключающіеся въ первой строкѣ, содержатся и во второй, и наоборотъ.

Кромѣ полныхъ и частныхъ интеграловъ, нѣкоторыя дифференціальныя уравненія имѣютъ еще *особенные интегралы*, не заключающіеся въ полныхъ, какъ частные случаи.

Примѣры:

интегралы уравненія: $(y - x\cos 3x)(y'' - 6x + 2) = 0$:

$$y = x^3 - x^2 + C_1 x + C_2 \text{ (полный)},$$

$$y = x^3 - x^2 + 5x - 8, \; y = x^3 - x^2 - 7x + 2, \ldots \text{ (частные)},$$

$$y = x\cos 3x \text{ (особенный)};$$

интегралъ уравненія: $[y-l(1+x^2)]y''+(1+x^2)yy'-2xy=0$:

$y=l(1+x^2)$ (особенный).

518. Напишемъ $n+1$ уравненій, изъ которыхъ первое — полный интегралъ уравненія:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0 \quad (1),$$

а остальныя получаются изъ него дифференцированіемъ.

Пусть эти уравненія:

$$\begin{aligned} &F(x, y, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)=0\\ &F_1(x, y, y', C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)=0\\ &F_2(x, y, y', y'', C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)=0 \quad (2)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_{n-1}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)=0\\ &F_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)=0. \end{aligned}$$

Исключеніе изъ нихъ n постоянныхъ произвольныхъ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ приведетъ къ уравненію вида:

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0, \quad (3)$$

которое однозначуще съ (1). Дѣйствительно: пусть, по разрѣшеніи относительно $y^{(n)}$, оно даетъ:

$$y^{(n)}=\xi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

а (1), разрѣшенное также относительно $y^{(n)}$, даетъ:

$$y^{(n)}=\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)});$$

тогда:

$$\xi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})=\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Равенство это тождественно, — потому что въ противномъ случаѣ, подставляя въ немъ x_0 на мѣсто x, мы изъ уравненія

$$\xi(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}) = \varphi(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$$

могли-бы выразить $y_0^{(n-1)}$ въ зависимости отъ $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y^{(n-2)}$, — что невозможно, по совершенной произвольности количествъ: $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-2)}, y_0^{(n-1)}$.

И такъ функціи φ и ξ тождественно равны; другими словами: уравненія (1) и (3), по разрѣшеніи относительно $y^{(n)}$, даютъ функціи тождественно одинаковыя.

Исключимъ изъ n уравненій:

$$F = 0,\ F_1 = 0,\ F_2 = 0, \ldots, F_{n-1} = 0$$

$n-1$ постоянныхъ произвольныхъ: $C_2, C_3, \ldots, C_n$; получимъ уравненіе вида:

$$\Theta_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0,$$

которое по отношенію къ уравненію (1) называютъ *интеграломъ перваго порядка.*

Интеграловъ перваго порядка уравненіе (1) имѣетъ n. Исключимъ теперь изъ $n-1$ уравненій:

$$F = 0,\ F_1 = 0,\ F_2 = 0, \ldots, F_{n-2} = 0$$

$n-2$ постоянныхъ произвольныхъ: $C_3, C_4, \ldots, C_n$; получимъ уравненіе вида:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}, C_1, C_3) = 0,$$

которое по отношенію къ (1) называютъ *интеграломъ втораго порядка.* Интеграловъ втораго порядка $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Подобными же исключеніями получимъ интегралы третьяго и высшихъ порядковъ. Вообще *интегралы порядка k* ($k < n$) имѣютъ видъ:

$$\Pi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0,$$

и число ихъ равно числу сочетаній изъ n буквъ по k, т. е. $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$.

Интегралъ n-то порядка — одинъ: это — полный интегралъ.

Если извѣстны всѣ n интеграловъ перваго порядка:

$$\Theta_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0$$
$$\Theta_2(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C_2) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Theta_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C_n) = 0,$$

то, исключая изъ нихъ $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, получимъ уравненіе вида:

$$F(x, y, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = 0,$$

т. е. полный интегралъ.

Приведенное выше дифференціальное уравненіе:

$$y''' + y' = x$$

имѣетъ слѣдующіе интегралы:

$$\left.\begin{array}{l} y'' + y = C_1 + 1 + \frac{x^2}{2} \\ y'\cos x - y''\sin x = C_2 + x\cos x - \sin x \\ y'\sin x + y''\cos x = -C_3 + x\sin x + \cos x \end{array}\right\} \text{(интегралы перваго порядка)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y\sin x + y'\cos x = C_1\sin x + C_2 + \frac{x^2}{2}\sin x + x\cos x \\ y\cos x - y'\sin x = C_1\cos x + C_3 + \frac{x^2}{2}\cos x - x\sin x \\ y' = C_2\cos x - C_3\sin x + x \end{array}\right\} \text{(интегралы втораго порядка)}$$

$$y = C_1 + C_2\sin x + C_3\cos x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{(полный интегралъ).}$$

519. Постоянныя произвольныя, входящія въ полный интегралъ, принимаютъ опредѣленныя значенія, когда для n частныхъ значеній перемѣнной независимой задаются значенія функціи. Такъ, если для $x = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ даны значенія y : $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, то постоянныя $C_1, C_2, \ldots, C_n$ найдутся изъ слѣдующихъ n уравненій:

$$F(x_1, y_1, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

$$F(x_2, y_2, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

. . . .

. . . .

$$F(x_n, y_n, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Эти постоянныя выводятъ и изъ другихъ условій. Обыкновенно опредѣляютъ ихъ по даннымъ значеніямъ $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ для даннаго значенія x. Такъ, если эти функціи для $x = x_0$ заданы числами: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, то постоянныя $C_1, C_2, \ldots, C_n$, соотвѣтствующія этимъ заданіямъ, найдутся изъ уравненій:

$$F(x_0, a_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

$$F_1(x_0, a_0, a_1, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

$$F_2(x_0, a_0, a_1, a_2, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

. . . .

. . . .

$$F_{n-1}(x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

которыя составляются подстановкою въ первыя n уравненій (2) n° 518 на мѣсто $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ количествъ $x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Найдемъ, напримѣръ, тотъ изъ частныхъ интеграловъ уравненія: $y''' + y' = x$ (n° 516), для котораго при $x = 0$ было-бы: $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = 0$. Полный интегралъ этого уравненія и два уравненія, получаемыя изъ него дифференцированіемъ:

$$y = C_1 + \frac{x^2}{2} + C_2 \sin x + C_3 \cos x,$$

$$y' = x + C_2 \cos x - C_3 \sin x, \quad y'' = 1 - C_2 \sin x - C_3 \cos x,$$

если сдѣлать въ нихъ: $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = 0$, даютъ:

$$0 = C_1 + C_3, \quad 1 = C_2, \quad 0 = 1 - C_3,$$

откуда: $$C_1 = -1, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 1;$$

слѣдовательно искомый частный интегралъ будетъ:

$$y = \frac{x^2}{2} - 1 + \sin x + \cos x.$$

520. Кривыя, соотвѣтствующія дифференціальному уравненію перваго порядка (ихъ безчисленное множество)

$$f(x, y, y') = 0, \qquad (a)$$

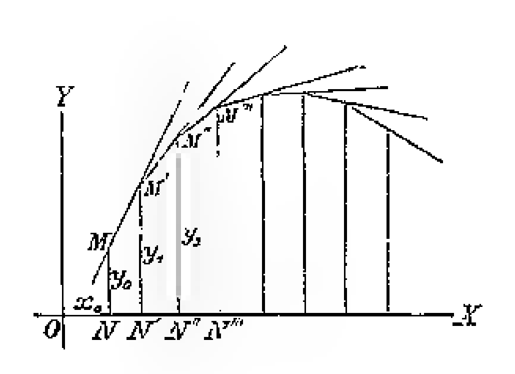
можно строить слѣдующимъ образомъ. Дадимъ перемѣнной x значеніе x_0; пусть при этомъ y приметъ значеніе y_0 (его можно взять какимъ угодно). Построимъ точку M по координатамъ ея x_0 и y_0. Положеніе касательной къ кривой въ этой точкѣ нельзя назначить по произволу; оно опредѣлится значеніемъ производной y', которую найдемъ изъ уравненія (a). Пусть это уравненіе даетъ:

$$y' = \varphi(x, y);$$

тогда:

$$y_0' = \varphi(x_0, y_0).$$

Зная y_0', т. е. тангенсъ угла, образуемаго съ осью OX касательною къ кривой въ точкѣ M, мы можемъ построить и самую касательную. Примемъ весьма малую часть MM' этой касательной за элементъ кривой въ точкѣ M, и по координатамъ точки M', которыя пусть будутъ x_1 и y_1, вычислимъ тангенсъ угла, образуемаго касательною къ кривой въ этой точкѣ съ осью OX:



$$y_1' = \varphi(x_1, y_1).$$

Затѣмъ построимъ эту касательную, и часть ея $M'M''$ опять примемъ за элементъ кривой, и т. д. Такимъ образомъ построится ломанная $MM'M''M'''\ldots$, которая тѣмъ ближе къ искомой кривой, проходящей чрезъ точку M, чѣмъ менѣе отрѣзки MM', $M'M''$,

$M''M'''$, ... Также построятся и другія кривыя, отвѣчающія данному уравненію.

Если данное уравненіе втораго порядка:

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

то при $x = x_0$ мы можемъ назначить по произволу не только y, но и y'; а y'' опредѣлится изъ уравненія, которое пусть даетъ:

$$y'' = \varphi(x, y, y').$$

Обозначимъ y и y', отвѣчающія абсциссѣ x_0, чрезъ y_0 и y_0' (величины произвольныя); тогда:

$$y_0'' = \varphi(x_0, y_0 ; y_0').$$

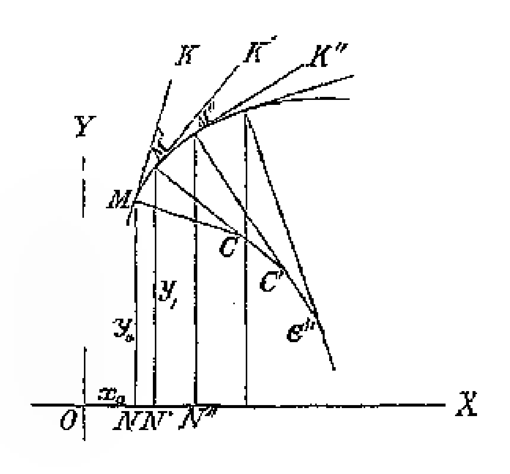
Такимъ образомъ, задавши при $x = x_0$ ординату $MN = y_0$ и положеніе касательной MK къ кривой въ точкѣ M, мы найдемъ для этой точки y'', а слѣдовательно будемъ знать въ ней и радіусъ кривизны, который опредѣляется вообще по формулѣ:

$$\rho = \text{абс. вел} \; \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

и слѣдовательно въ точкѣ M будетъ:

$$\rho_0 = \text{абс. вел.} \; \frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}.$$

Отложимъ этотъ радіусъ кривизны отъ точки M по нормали къ кривой въ сторону вогнутости кривой (сторону вогнутости узнаемъ по знаку y_0''). Пусть онъ MC. Принимая точку C за центръ, радіусомъ MC опишемъ дугу, и часть MM' этой дуги примемъ за элементъ искомой кривой. Въ точкѣ M' построимъ касательную $M'K'$



къ дугѣ MM'. Измѣримъ координаты точки $M'(x_1, y_1)$ и уголъ между касательною $M'K'$ и осью OX. Затѣмъ вычислимъ тангенсъ этого угла, который пусть будетъ y_1'; тогда значенія y'' и ρ въ точкѣ M' будутъ:

$$y_1'' = \varphi(x_1, y_1, y_1'), \ \ \rho_1 = \text{абс. вел.} \frac{(1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_1''}.$$

Отложимъ $\rho_1 = M'C'$ по нормали къ MM' въ точкѣ M', и радіусомъ $M'C'$, принимая C' за центръ, опишемъ дугу, часть которой $M'M''$ примемъ за элементъ кривой,—и т. д. Линія $MM'M''\ldots$, состоящая изъ круговыхъ элементовъ, будетъ тѣмъ ближе подходить къ искомой кривой, проходящей чрезъ точку M и имѣющей въ этой точкѣ касательную MK, чѣмъ менѣе элементы MM', $M'M''$, ...

Подобнымъ же образомъ можно строить и другія кривыя, проходящія чрезъ туже точку M, но имѣющія въ этой точкѣ другія касательныя. Кромѣ того при $x = x_0$ можно задать другую ординату y_0, и получивши такимъ образомъ другую точку, отвѣчающую прежней абсциссѣ x_0, строить кривыя, проходящія чрезъ эту точку, и т. д.

Интегрированіе уравненій перваго порядка, линейныхъ относительно производной.

521. Пусть уравненіе $f(x, y, y') = 0$ линейное относительно y'; тогда его можно представить подъ видомъ:

$$X + Yy' = 0, \text{ или: } Xdx + Ydy = 0,$$

гдѣ X и Y данныя функціи x и y.

Если X есть функція одного x, а Y—одного y, то въ послѣднемъ уравненіи перемѣнныя x и y *отдѣлены*, т. е. членъ Xdx содержитъ только x и dx, а членъ Ydy только y и dy. Въ такомъ случаѣ интегрированіе уравненія приводится къ интегрированію функцій объ одной перемѣнной, или, какъ говорится, *къ квадратурамъ*.

Примѣръ: дано уравненіе:

$$4x^3\, dx + y \sin y\, dy = 0;$$

полный интегралъ его:

$$\int 4x^3\,dx + \int y \sin y\,dy = C,$$

или:

$$x^4 - y\cos y + \sin y = C.$$

Если X содержитъ въ себѣ только y, а Y — только x, то дѣленіемъ на XY перемѣнныя отдѣляются; тогда уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{dx}{Y} + \frac{dy}{X} = 0,$$

а интегрированіе его приводится къ квадратурамъ.

Примѣръ:

$$\cos^2 y\,dx + x dy = 0,\ \frac{dx}{x} + \frac{dy}{\cos^2 y} = 0;$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{\cos^2 y} = C,\ lx + \operatorname{tg} y = C.$$

Если въ уравненіи:

$$X_{\text{I}}\ Y_{\text{I}}\ dx + X_{\text{II}}\ Y_{\text{II}}\ dy = 0$$

X_{I} и X_{II} зависятъ только отъ x, а Y_{I} и Y_{II} только отъ y, то перемѣнныя отдѣлятся дѣленіемъ на $X_{\text{II}}\ Y_{\text{I}}$.

$$\frac{X_{\text{I}}}{X_{\text{II}}} dx + \frac{Y_{\text{II}}}{Y_{\text{I}}} dy = 0,\ \int \frac{X_{\text{I}}}{X_{\text{II}}} dx + \int \frac{Y_{\text{II}}}{Y_{\text{I}}} dy = C.$$

Примѣры:

а) $$xy^3\,dx + (x^2 + 1)(y^2 - y + 1)\,dy = 0;$$

$$\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{y^2-y+1}{y^3}\,dy = 0,$$

$$l(x^2 + 1) + 2ly + \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} = C,$$

или: $$l\left[(x^2+1)y^2\right] + \frac{2y-1}{y^2} = C.$$

b) $$y^2 \sin x\,dx \quad e^x\,l(1+y)\,dy = 0;$$

$$e^{-x} \sin x\,dx - \frac{l(1+y)}{y^2}\,dy = 0,$$

$$\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{l(1+y)}{y} + l\frac{y}{1+y} = C.$$

522. Однородныя уравненія. Пусть X и Y однородныя функціи x и y, съ однимъ и тѣмъ же показателемъ однородности k; тогда имъ можно дать видъ:

$$X = x^k \varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ Y = x^k \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

а уравненіе: $Xdx + Ydy = 0$, по сокращеніи на x^k, обратится въ слѣдующее:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Полагая: $\frac{y}{x} = z$, откуда: $y = xz$, $dy = zdx + xdz$, получимъ:

$$\varphi(z)\,dx + \psi(z)\,(zdx + xdz) = 0,$$

или:

$$[\varphi(z) + z\psi(z)]\,dx + x\,\psi(z)\,dz = 0.$$

Отсюда, отдѣляя перемѣнныя, находимъ:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\,\psi(z)} = 0;$$

слѣдовательно:

$$lx + \int \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\psi(z)} = C.$$

Когда интегралъ $\int \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\psi(z)}$ найдется, надобно въ немъ z замѣнить отношеніемъ $\frac{y}{x}$.

Примѣры:

a) $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$;

$$x^4 + 2x^2y^2 = C.$$

b) $ydx + \sqrt{x^2 + y^2}\,dy = 0$;

$$\frac{x}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + ly + l\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right) = C.$$

c) $(ax + by)\,dx + (\alpha x + \beta y)\,dy = 0, \quad (a, b, \alpha, \beta$ пост.)

$$lx + \int \frac{(\beta z + \alpha)\,dz}{\beta z^2 + (b + \alpha)\,z + a} = C. \quad \left(z = \frac{y}{x}\right).$$

523. Уравненіе $(ax + by + c)dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)\,dy = 0$ приводится къ однородному. Положимъ:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + h \\ y &= y_1 + k \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{c} x_1 \text{ и } y_1 \text{ новыя перемѣнныя,} \\ h \text{ и } k \text{ постоянныя.} \end{array}\right);$$

тогда:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= ax_1 + by_1 + ah + bk + c \\ \alpha x + \beta y + \gamma &= \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha h + \beta k + \gamma \end{aligned} \quad \begin{aligned} dx &= dx_1 \\ dy &= dy_1. \end{aligned}$$

Если подчинимъ h и k условіямъ:

$$ah + bk + c = 0, \;\; \alpha h + \beta k + \gamma = 0, \qquad (A)$$

то приведемъ уравненіе къ слѣдующему однородному:

$$(ax_1 + by_1)\,dx_1 + (\alpha x_1 + \beta y_1)\,dy_1 = 0.$$

Въ интегралѣ послѣдняго уравненія перемѣнныя x_1 и y_1 слѣдуетъ замѣнить разностями: $x - h$ и $y - k$.

Въ случаѣ: $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} \gtrless \frac{c}{\gamma}$, условіямъ (A) удовлетворить нельзя; тогда, обозначая равныя между собою отношенія $\frac{a}{\alpha}$ и $\frac{b}{\beta}$ черезъ q, получимъ: $a = \alpha q$, $b = \beta q$, и данному уравненію можемъ дать видъ:

$$[q(\alpha x + \beta y) + c]\,dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)\,dy = 0.$$

Если положить: $\alpha x + \beta y = u$, откуда: $\beta dy = du - \alpha dx$, то:

$$\beta\,(qu + c)\,dx + (u + \gamma)\,(du - \alpha dx) = 0\,,$$

или:

$$[(\beta q - \alpha)\,u + \beta c - \alpha\gamma]\,dx + (u + \gamma)\,du = 0;$$

а отсюда:

$$x + \int \frac{(u+\gamma)\,du}{(\beta q - \alpha)\,u + \beta c - \alpha\gamma} = C.$$

Въ случаѣ: $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$, обозначая эти равныя отношенія черезъ q, мы можемъ данное уравненіе представить подъ видомъ:

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)(q dx + dy) = 0.$$

Полный интегралъ его будетъ:

$$qx + y = C,$$

и особенный:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Послѣдній интегралъ будетъ особеннымъ, когда отношеніе $\frac{\alpha}{\beta}$ отличается отъ q. Если же $\frac{\alpha}{\beta} = q$, то онъ заключается въ полномъ, какъ частный случай.

Уравненіе: $(ax + by + c)\,dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)\,dy = 0$ можно привести къ однородному и слѣдующими положеніями:

$$ax + by + c = x_1,\ \ \alpha x + \beta y + \gamma = y_1.$$

524. Уравненіе, линейное относительно y и y', можно представить подъ видомъ:

$$y' + Xy + X_1 = 0, \text{ или: } dy + (Xy + X_1)\,dx = 0,$$

гдѣ X и X_1 данныя функціи одной перемѣнной x.

Чтобы проинтегрировать его, представимъ искомую функцію y произведеніемъ uv; тогда:

$$dy = vdu + udv;$$

и потому:

$$vdu + udv + (Xuv + X_1)\,dx = 0,$$

или:

$$v(du + Xudx) + udv + X_1 dx = 0.$$

Однимъ изъ множителей, u или v, мы можемъ распорядиться по произволу. Подчинимъ u условію:

$$du + Xudx = 0,$$

откуда:

$$\frac{du}{u} + Xdx = 0,\ lu = -\int Xdx,\ u = e^{-\int Xdx};$$

тогда для опредѣленія v получимъ уравненіе:

$$udv + X_1 dx = 0,$$

которое даетъ:

$$dv = -\frac{X_1 dx}{u} = -e^{\int X dx} X_1 dx,$$

$$v = -\int e^{\int X dx} X_1 dx.$$

Слѣдовательно:

$$y = -e^{-\int X dx} \int e^{\int X dx} X_1 dx.$$

Съ перваго взгляда можетъ показаться, что въ составъ послѣдняго уравненія входятъ двѣ постоянныхъ произвольныхъ; но легко видѣть, что онѣ приводятся къ одной.

Дѣйствительно: пусть: $\int Xdx = \varphi(x) + C$; тогда:

$$y = -e^{-\varphi(x) - C} \int e^{\varphi(x) + C} X_1 dx = -e^{-\varphi(x)} \int e^{\varphi(x)} X_1 dx;$$

а полагая: $\int e^{\varphi(x)} X_1 dx = \xi(x) + C_1$, имѣемъ:

$$y = -\left[\xi(x) + C_1\right] e^{-\varphi(x)}.$$

Примѣры:

a) $xy' + y = x^2 \sin x$

$xy + (x^3 - 2)\cos x - 2x \sin x = C$

b) $y' - 2xy = 4x^3 e^{x^2}$

$$y = (x^4 + C)e^{x^2}$$

c) $$(x^2 + 1)y' + 2xy - x^4 - x^2 = 0.$$

$$15(x^2 + 1)y = 3x^5 + 5x^3 + C.$$

525. Уравненіе:

$$y' + Xy + X_1 y^n = 0, \text{ или: } dy + (Xy + X_1 y^n)dx = 0,$$

въ которомъ X и X_1 функціи одного x, а n постоянное число, отличное отъ 0 и отъ 1, приводится къ линейному, если раздѣлимъ обѣ части на y^n, и положимъ потомъ:

$$y^{1-n} = z.$$

Дѣйствительно, тогда получимъ:

$$y^{-n}dy + (Xy^{1-n} + X_1)dx = 0,$$

$$dz + (1-n)(Xz + X_1)dx = 0,$$

или:

$$z' + (1-n)Xz + (1-n)X_1 = 0,$$

— уравненіе линейное въ отношеніи къ z и z'.

Примѣръ:

$$y' + xy - xy^3 = 0;$$

$$\frac{dy}{y^3} + \frac{xdx}{y^2} - xdx = 0,$$

$$dz - 2xz\,dx + 2x\,dx = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{y^2} = z \\ -\frac{2dy}{y^3} = dz \end{array} \right\}$$

$$z = Ce^{x^2} + 1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{x^2} + 1}}.$$

526. Уравненіе:

$$y' + Xy^2 + X_1 y + X_{11} = 0 \qquad (X, X_1 \text{ и } X_{11} \text{ функціи } x)$$

приведется къ предыдущему, если извѣстенъ одинъ изъ частныхъ его интеграловъ.

Пусть:

$$y = y_1 \qquad (y_1 \text{ опред. функція } x)$$

частный интегралъ; по этому:

$$y_1' + Xy_1^2 + X_1 y_1 + X_{11} = 0.$$

Полный интегралъ представимъ подъ видомъ: $y = y_1 + z$, и найдемъ z.

Подставляя въ данное уравненіе сумму $y_1 + z$ на мѣсто y, получимъ:

$$(y_1 + z)' + X(y_1 + z)^2 + X_1(y_1 + z) + X_{11} = 0,$$

или:

$$y'_1 + Xy_1^2 + X_1 y_1 + X_{11} + z' + (2Xy_1 + X_1)z + Xz^2 = 0.$$

Въ этомъ уравненіи сумма первыхъ четырехъ членовъ равна 0; и потому:

$$z' + (2Xy_1 + X_1)z + Xz^2 = 0.$$

Изъ послѣдняго уравненія, въ которомъ коэффиціенты $2Xy_1 + X_1$ и X опредѣленныя функціи x, и которое подходитъ подъ уравненіе nº 525, мы найдемъ z; а прибавляя y_1 къ найденному z, получимъ полный интегралъ даннаго уравненія.

Примѣръ:

$$y' - xy^2 + x^2y + x^2 + x - 1 = 0;$$

$$y = x + 1 \qquad (\text{частный интегралъ}),$$

$$y = x + 1 + z \qquad (\text{полный интегралъ});$$

$$z' - (x^2 + 2x)z - xz^2 = 0,$$

$$\frac{dz}{z^2} - \frac{x^2+2x}{z}dx - xdx = 0, \quad \frac{1}{z} = u, \quad -\frac{dz}{z^2} = du,$$

$$du + (x^2 + 2x)u\,dx + xdx = 0$$

$$u = -e^{-\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)}\int xe^{\frac{x^3}{3}+x^2}dx$$

$$z = -\frac{e^{\frac{x^3}{3}+x^2}}{\int xe^{\frac{x^3}{3}+x^2}dx}, \quad y - x + 1 - \frac{e^{\frac{x^3}{3}+x^2}}{\int xe^{\frac{x^3}{3}+x^2}dx},$$

$$e^{\frac{x^3}{3}+x^2} + (y - x - 1)\int xe^{\frac{x^3}{3}+x^2}dx = 0.$$

Постоянная произвольная заключается въ $\int xe^{\frac{x^3}{3}+x^2}dx$.

527. Уравненіе Риккати:

$$(1) \qquad y' + ay^2 = bx^m \qquad (a,\ b \text{ и } m \text{ постоянныя})$$

получится изъ уравненія n° 526 при: $X=a$, $X_1=0$, $X_{11}=-bx^m$. Разсмотримъ, при какихъ значеніяхъ m мы проинтегрируемъ его.

При $m=0$ оно принимаетъ видъ:

$$y' + ay^2 = b, \text{ или: } dy + (ay^2 - b)dx = 0,$$

откуда:

$$dx + \frac{dy}{ay^2 - b} = 0.$$

Перемѣнныя отдѣлены; полный интегралъ будетъ:

$$x + \int \frac{dy}{ay^2 - b} = C.$$

При $m=-2$ уравненіе (1) также легко интегрируется; раздѣляя обѣ части его на y^2 и помножая на dx, получимъ:

$$\frac{dy}{y^2} + adx = \frac{bx^m}{y^2}dx;$$

затѣмъ, полагая: $\frac{1}{y} = z$, будемъ имѣть:

$$-dz + adx = bx^m z^2 dx,$$

— уравненіе, которое при $m=-2$ дѣлается однороднымъ (показатель однородности 0).

Чтобы найти другія значенія m, при которыхъ уравненіе (1) проинтегрируемъ, употребимъ слѣдующій пріемъ: введемъ вмѣсто y новую перемѣнную z, которую свяжемъ съ y уравненіемъ:

$$(2). \qquad y = Mz + N,$$

гдѣ M и N произвольныя функціи x; тогда:

$$dy = zdM + Mdz + dN,$$

$$y^2 = M^2z^2 + 2MNz + N^2,$$

и уравненіе (1), или, что все равно, уравненіе

$$(A) \qquad dy + ay^2\,dx - bx^m\,dx = 0$$

обращается въ слѣдующее:

$$z(dM + 2aMNdx) + dN + aN^2dx + Mdz + aM^2z^2dx - bx^mdx = 0.$$

Пользуясь произвольностью функцій M и N, подчинимъ ихъ условіямъ:

$$dN + aN^2\,dx = 0 \qquad (3)$$

$$dM + 2aMNdx = 0 \qquad (4);$$

тогда:

$$Mdz + aM^2z^2dx - bx^m\,dx = 0 \qquad (5)$$

Условіе (3) даетъ:

$$\frac{dN}{N^2} + adx = 0,$$

откуда: $-\frac{1}{N} + ax = C$; а взявъ $C = 0$, получимъ:

$$N = \frac{1}{ax}.$$

При такомъ N уравненіе (4) принимаетъ видъ:

$$dM + \frac{2Mdx}{x} = 0, \text{ или: } \frac{dM}{M} + \frac{2dx}{x} = 0,$$

откуда: $Mx^2 = C_1$; по этому, принимая $C_1 = 1$, имѣемъ:

$$M = \frac{1}{x^2}.$$

При $M = \frac{1}{x^2}$ и $N = \frac{1}{ax}$, уравненія (2) и (5) обращаются въ слѣдующія:

$$y = \frac{z}{x^2} + \frac{1}{ax} \tag{6}$$

$$\frac{dz}{x^2} + \frac{az^2}{x^4}dx - bx^m dx = 0 \tag{7}$$

Въ послѣднее введемъ множитель x^2 и дѣлитель z^2; получимъ:

$$\frac{dz}{z^2} + \frac{adx}{x^2} - \frac{bx^{m+2}}{z^2}dx = 0,$$

или $\left(\text{полагая } \frac{1}{z} = y_1\right)$:

$$dy_1 + \frac{adx}{x^2} - by_1^2 x^{m+2} dx = 0 \tag{8}.$$

Положимъ теперь: $x^{m+3} = x_1$; тогда:

$$x^{m+2}dx = \frac{dx_1}{m+3},\ x = x_1^{\frac{1}{m+3}},\ dx = \frac{1}{m+3}x_1^{-\frac{m+2}{m+3}}dx_1, \frac{1}{x^2} = x_1^{-\frac{2}{m+3}},$$

и уравненіе (8) приметъ видъ:

$$dy_1 + \frac{b}{m+3}y_1^2 dx_1 - \frac{a}{m+3}x_1^{-\frac{m+4}{m+3}}dx_1 = 0,$$

или $\left(\text{полагая для краткости: } \frac{b}{m+3} = a_1,\ \frac{a}{m+3} = b_1,\ -\frac{m+4}{m+3} = m_1\right)$:

$$dy_1 + a_1 y_1^2 dx_1 - b_1 x_1^{m_1} dx_1 = 0 \tag{9}.$$

Уравненіе (9) имѣетъ видъ, одинаковый съ (A); по этому мы проинтегрируемъ его, когда $m_1 = 0$, или когда $m_1 = -2$, т. е. когда m равно -4, или -2. Стало-быть уравненіе (A) можемъ еще интегрировать при $m = -4$. Далѣе, изъ равенства $-\frac{m+4}{m+3} = m_1$, которое даетъ: $m = -\frac{3m_1+4}{m_1+1}$, находимъ: если $m_1 = -4$, то $m = -\frac{8}{3}$; если $m_1 = -\frac{8}{3}$, то $m = -\frac{12}{5}$; если $m_1 = -\frac{12}{5}$, то $m = -\frac{16}{7}$, и т. д. Слѣдовательно уравненіе Риккати мы можемъ интегрировать

при $m=0, -4, -\frac{8}{3}, -\frac{12}{5}, -\frac{16}{7}, \ldots$, вообще при $m=-\frac{4k}{2k-1}$ *); сверхъ того при $m=-2$.

Сдѣлаемъ теперь другое преобразованіе уравненія (A); положимъ: $x^{m+1}=x_1$; тогда:

$$x^m dx=\frac{1}{m+1}dx_1,\ x=x_1^{\frac{1}{m+1}},\ dx=\frac{1}{m+1}x_1^{-\frac{m}{m+1}}dx_1,$$

и уравненіе (A) обратится въ слѣдующее:

$$dy+\frac{a}{m+1}y^2x_1^{-\frac{m}{m+1}}dx_1-\frac{b}{m+1}dx_1=0,$$

или:

$$-\frac{dy}{y^2}+\frac{b}{m+1}\cdot\frac{1}{y^2}dx_1-\frac{a}{m+1}x_1^{-\frac{m}{m+1}}dx_1=0,$$

или $\left(\text{полагая: } \frac{1}{y}=y_1,\ \frac{b}{m+1}=a_1,\ \frac{a}{m+1}=b_1,\ -\frac{m}{m+1}=m_1\right)$:

$$dy_1+a_1y_1^2dx_1-b_1x_1^{m_1}dx_1=0 \qquad (10).$$

Опять видимъ, что уравненіе (10) имѣетъ видъ одинаковый съ (A); слѣдовательно мы его проинтегрируемъ, когда: $m_1=-\frac{4k}{2k-1}$; другими словами: уравненіе (A) проинтегрируемъ, когда $m=-\frac{4k}{2k+1}$, т. е.

$$\text{при } m=-\frac{4}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{16}{9}, \ldots$$

И такъ уравненіе Риккати мы проинтегрируемъ, когда въ немъ m имѣетъ видъ $-\frac{4k}{2k\pm1}$.

Послѣдняя дробь, заключая въ себѣ числа: $-4, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{16}{9}, \ldots$, даетъ и 0, и -2; 0 при $k=0$, а -2 при $k=\infty$.

---

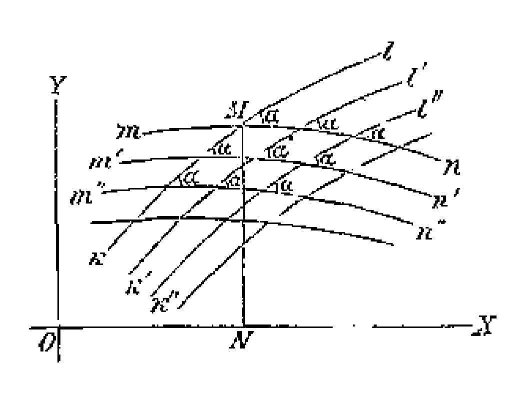
*) Легко доказать, что если число m_1 имѣетъ форму $-\frac{4k}{2k-1}$, то и m имѣетъ туже форму; въ самомъ дѣлѣ: полагая $m_1=-\frac{4k}{2k-1}$, изъ уравненія $m=-\frac{3m_1+4}{m_1+1}$ находимъ: $m=-\frac{4(k+1)}{2(k+1)-1}$.

О траэкторіяхъ.

528. Вообразимъ систему линій, уравненіе которыхъ:

$$f(x, y, a) = 0 \quad (a \text{ перемѣнный параметръ}),$$

и будемъ искать ихъ *траэкторіи*, — линіи, встрѣчающія ихъ подъ однимъ и тѣмъ же даннымъ угломъ. Пусть mn, $m'n'$, $m''n''$, ... траэкторіи данныхъ линій: kl, $k'l'$, $k''l''$,.... Тангенсъ угла, составляемаго касательною въ точкѣ $M(x, y)$ къ кривой kl съ осью OX, будетъ производная y', опредѣляемая дифференцированіемъ изъ уравненія:



$$f(x, y, a) = 0 \tag{1}$$

Производная y' выразится въ x, y и a; а замѣняя параметръ a выраженіемъ его въ x и y, выведеннымъ изъ (1), получимъ y' въ функціи x и y; пусть эта функція $\xi(x, y)$.

Тангенсъ угла, образуемаго касательною къ линіи mn въ той же точкѣ $M(x, y)$ съ осью OX, будетъ производная искомой ординаты y, отвѣчающей искомой траэкторіи. И потому, если данный уголъ между данными линіями и ихъ траэкторіями есть α, то:

$$\frac{y' - \xi(x, y)}{1 + y'\xi(x, y)} = \operatorname{tg} \alpha,$$

или:

$$dy - \xi(x, y)\,dx = k\,[dx + \xi(x, y)\,dy]. \qquad (k = \operatorname{tg} \alpha)$$

Это дифференціальное уравненіе относится къ траэкторіямъ; интегрированіе его доставитъ уравненіе траэкторій.

Траэкторіи, встрѣчающія данныя линіи подъ прямымъ угломъ, называютъ *прямоугольными*. Дифференціальное уравненіе прямоугольныхъ траэкторій:

$$1 + y'\xi(x, y) = 0, \text{ или: } dx + \xi(x, y)\,dy = 0.$$

529. *Прямоугольныя траэкторіи параболъ, имѣющихъ общую ось и общую вершину.*

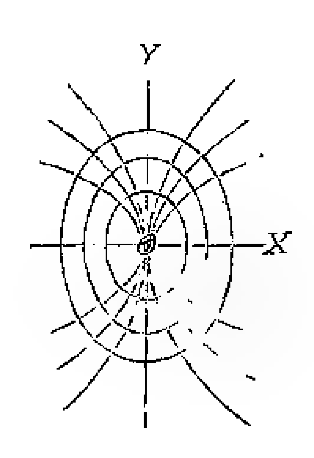
$$y^2 = 2px \qquad (2p \text{ перемѣнный параметръ})$$

$$y' = \frac{p}{y} = \frac{y}{2x}, \quad \xi(x, y) = \frac{y}{2x},$$

$$2x\,dx + y\,dy = 0 \qquad (\text{дифф. уравненіе траэкторіи}),$$

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{2C^2} = 1 \qquad (\text{полный интегралъ}).$$

Искомыя траэкторіи —эллипсы, центры которыхъ въ общей вершинѣ параболъ, малыя оси идутъ по общей оси параболъ, а отношеніе длины большой оси къ длинѣ малой въ каждомъ равно $\sqrt{2}$.



530. *Траэкторіи системы прямыхъ линій, пересѣкающихся въ одной точкѣ.* Примемъ общую точку пересѣченія прямыхъ за начало координатъ; тогда уравненіе прямыхъ будетъ:

$$y = ax \qquad (a \text{ перемѣнный параметръ}).$$

Изъ него:

$$y' = a = \frac{y}{x}, \quad \xi(x, y) = \frac{y}{x};$$

для траэкторій:

$$dy - \frac{y}{x}dx = k\left(dx + \frac{y}{x}dy\right),$$

$$xdy - ydx = k(xdx + ydy).$$

Уравненіе это можемъ интегрировать, какъ однородное; но удобнѣе ввести полярныя координаты:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$xdy - ydx = x^2\,d\frac{y}{x} = r^2\cos^2\varphi\,d\,\mathrm{tg}\,\varphi = r^2\,d\varphi,$$

$$x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r\,dr\,;$$

$$r^2\,d\varphi = kr\,dr\,,\;\; r\,d\varphi - k\,dr\,,$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{k} d\varphi = k_1\,d\varphi \quad \left(\frac{1}{k} \text{ обозначено чрезъ } k_1\right)$$

$$lr = k_1\varphi + C,\;\; r = C_1 e^{k_1\varphi}. \quad (e^C \text{ обозначено чрезъ } C_1).$$

Искомыя траэкторіи — логариѳмическія спирали.

Уравненіе: $xdy - ydx = k(xdx + ydy)$, или: $xdx + ydy = k_1(xdy - ydx)$, можно проинтегрировать еще такъ: раздѣлимъ обѣ части его на $x^2 + y^2$; тогда оно обратится въ слѣдующее:

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = k_1 \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

или:

$$\frac{1}{2} dl(x^2 + y^2) = k_1\,d\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x};$$

а отсюда:

$$\frac{1}{2} l(x^2 + y^2) = k_1\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x} + C,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C_1 e^{k_1\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x}}. \qquad (C_1 = e^C).$$

Послѣднее уравненіе введеніемъ полярныхъ координатъ приводится къ:

$$r = C_1\,e^{k_1\varphi}.$$

Прямоугольныя траэкторіи разсматриваемой системы прямыхъ линій, очевидно, — *окружности круговъ,* имѣющихъ общій центръ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ, -что видно и изъ послѣдняго уравненія, которое, при $k_1 = 0$, обращается въ: $r = C_1$, — уравненіе круга.

Интегрированіе посредствомъ множителя.

531. Если коэффиціенты X и Y уравненія:

$$Xdx + Ydy = 0 \tag{1}$$

удовлетворяютъ условію $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, то, какъ видѣли въ n° 448, сумма $Xdx + Ydy$ есть полный дифференціалъ. Допустимъ, что это условіе

соблюдено, и найдемъ ту функцію, которой сумма $Xdx + Ydy$ служитъ полнымъ дифференціаломъ. Пусть эта функція u, т. е.:

$$Xdx + Ydy = du\,;$$

тогда данное уравненіе приводится къ слѣдующему:

$$du = 0\,,$$

и по этому полный интегралъ его будетъ:

$$u = C.$$

Примѣръ:

$$(12x^3y^2 - 15x^2y + 2x - 3)\,dx + (6x^4y - 5x^3 - 6y^2)\,dy = 0\,;$$

$$(12x^3y^2 - 15x^2y + 2x - 3)'_y = 24x^3y - 15x^2\,,$$

$$(6x^4y - 5x^3 - 6y^2)'_x = 24x^3y - 15x^2\,;$$

$$\int_0^x(12x^3y^2 - 15x^2y + 2x - 3)\,dx - \int_0^y 6y^2dy = 3x^4y^2 - 5x^3y + x^2 - 3x - 2y^3;$$

$$3x^4y^2 - 5x^3y + x^2 - 3x - 2y^3 = C \qquad \text{(полный интегралъ).}$$

532. Пусть теперь коэффиціенты X и Y суммы $Xdx + Ydy$ не удовлетворяютъ условію $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$; тогда сумма $Xdx + Ydy$ не будетъ полнымъ дифференціаломъ; но можно пріискать такой множитель M, при которомъ произведеніе

$$M\,(Xdx + Ydy)$$

дѣлается полнымъ дифференціаломъ. Въ существованіи такого множителя (будемъ называть его *интегрирующимъ*) можно убѣдиться слѣдующимъ разсужденіемъ. Представимъ полный интегралъ уравненія (1) подъ видомъ:

$$u = C \qquad (u \text{ функція } x \text{ и } y) \quad ^{*}),$$

*) Если полный интегралъ представить разрѣшеннымъ относительно C, то онъ приметъ видъ: $\xi(x, y) = C$.

и продифференцируемъ его; получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,$$

откуда:

$$y' = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Это выраженіе y', не содержащее въ себѣ постоянной произвольной C, тождественно одинаково съ тѣмъ, которое даетъ уравненіе (1), т. е. съ $-\frac{X}{Y}$ (см. n⁰ 518); и потому:

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{X}{Y}, \text{ откуда: } \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{X} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Y}.$$

Каждое изъ двухъ послѣднихъ отношеній, тождественно равныхъ между собою, есть интегрирующій множитель. Дѣйствительно: обозначая ихъ буквою M, имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = MX, \ \frac{\partial u}{\partial y} = MY;$$

по этому:

$$M(Xdx + Ydy) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du.$$

Кромѣ множителя M, равнаго отношенію $\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{X}$ или $\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Y}$, существуетъ безчисленное множество интегрирующихъ множителей вида $M\Theta(u)$ (Θ произвольная функція). Въ самомъ дѣлѣ, помножая $Xdx + Ydy$ на $M\Theta(u)$, и обозначая интегралъ $\int \Theta(u)\,du$ чрезъ U, получимъ:

$$M\Theta(u)\,(Xdx + Ydy) = \Theta(u)\,du = dU.$$

Другой формы интегрирующихъ множителей (не приводящихся къ виду $M\Theta(u)$) нѣтъ. Докажемъ это. Пусть M_1 интегрирующій множитель; по этому произведеніе $M_1(Xdx + Ydy)$ есть полный дифференціалъ нѣкоторой функціи u_1.

$$M_1\,(Xdx + Ydy) = du_1.$$

Дѣля $M_1 (Xdx + Ydy)$ на $M (Xdx + Ydy)$, находимъ:

$$\frac{M_1}{M} = \frac{du_1}{du}, \text{ откуда: } du_1 = \frac{M_1}{M} du,$$

или:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} dx + \frac{\partial u_1}{\partial y} dy = \frac{M_1}{M}\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right).$$

Это равенство разбивается на два слѣдующихъ:

(a) $$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{M_1}{M}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{M_1}{M}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

u опредѣленная функція x и y; обозначимъ ее чрезъ $\xi(x, y)$. Разрѣшая уравненіе

$$\xi(x, y) = u$$

относительно y, и подставляя найденный y въ u_1, мы выразимъ u_1 въ x и u. Пусть такимъ образомъ получили:

$$u_1 = \psi(x, u);$$

тогда:

(b) $$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Сравнивая (b) съ (a), находимъ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{M_1}{M}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0;$$

слѣдовательно функція ψ не содержитъ x; другими словами: u_1 есть функція u. Обозначимъ производную u_1 по u чрезъ $\Theta(u)$; тогда:

$$du_1 = \Theta(u)\, du;$$

но выше имѣли: $du_1 = \frac{M_1}{M} du$; по этому:

$$\frac{M_1}{M} = \Theta(u), \text{ откуда: } M_1 = M\Theta(u).$$

И такъ каждый изъ интегрирующихъ множителей приводится къ виду: $M\Theta(u)$.

Въ послѣднемъ произведеніи множитель M есть $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{X}$ или, что все

равно, $\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Y}$; но не трудно доказать, что всякій интегрирующій множитель можно представить произведеніемъ $M_1 \Theta(u)$, въ которомъ M_1 — множитель, выбранный между ними по произволу. Дѣйствительно: для двухъ интегрирующихъ множителей M_1 и M_{11} имѣемъ:

$$M_1 = M\Theta_1(u),\ M_{11} = M\Theta_{11}(u),$$

откуда:

$$\frac{M_{11}}{M_1} = \frac{\Theta_{11}(u)}{\Theta_1(u)},$$

или $\left(\text{обозначая отношеніе } \frac{\Theta_{11}(u)}{\Theta_1(u)}, \text{ какъ функцію } u, \text{ чрезъ } \Theta(u)\right)$:

$$M_{11} = M_1 \Theta(u).$$

И такъ, если извѣстенъ одинъ (какой-угодно) изъ интегрирующихъ множителей, то, помножая его на произвольную функцію u, получимъ произведеніе, въ которомъ заключаются всѣ множители.

Приведемъ примѣръ. Найдемъ интегрирующіе множители двучлена $(ydx - 2x\,dy)$. Полный интегралъ уравненія $(ydx - 2x\,dy = 0)$ есть: $\frac{y^2}{x} = C$; по этому:

$$u = \frac{y^2}{x},\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x},$$

$$M = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{X} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Y} = -\frac{y}{x^2};$$

стало-быть всѣ интегрирующіе множители двучлена $(ydx - 2x\,dy)$ заключаются въ произведеніи $\frac{y}{x^2}\Theta\left(\frac{y^2}{x}\right)$.

Разумѣя подъ $\Theta(u)$ послѣдовательно:

$$1,\ u,\ \frac{1}{u},\ u^2,\ \frac{1}{u^2},\ u^3 \sin^2 u, \ldots;$$

мы получимъ для двучлена $(ydx - 2x\,dy)$ слѣдующіе множители:

$$\frac{y}{x^2},\ \frac{y^3}{x^3},\ \frac{1}{xy},\ \frac{y^5}{x^4},\ \frac{1}{y^3},\ \frac{y^7}{x^5}\sin^2\frac{y^2}{x}, \ldots$$

Произведеніе двучлена на каждый изъ нихъ дастъ полный дифференціалъ. Эти полные дифференціалы будутъ:

$$\frac{y^2}{x^2}dx-\frac{2y}{x}dy,\ \frac{y^4}{x^3}dx-\frac{2y^3}{x^2}dy,\ \frac{dx}{x}-\frac{2dy}{y},$$ и т. д.

533. *Если извѣстны для двучлена $Xdx+Ydy$ два интегрирующихъ множителя, отношеніе которыхъ не постоянное, то по нимъ легко найдется полный интегралъ уравненія:* $Xdx+Ydy=0$. Сохраняя прежнія обозначенія, представимъ полный интегралъ подъ видомъ: $u=C$, и допустимъ, что M и M_1 два извѣстныхъ интегрирующихъ множителя, отношеніе которыхъ непостоянное. Мы знаемъ, что отношеніе это—функція u; по этому:

$$\frac{M_1}{M}=\psi(u);$$

а такъ какъ интегралу (полному) можно дать видъ:

$$\psi(u)=\psi(C),\ \text{или:}\ \psi(u)=C_1\quad (C_1\ \text{пост. произвольная}),$$

то, замѣняя $\psi(u)$ отношеніемъ $\frac{M_1}{M}$, имѣемъ:

$$\frac{M_1}{M}=C_1,\ \text{или:}\ M_1=C_1M.$$

534. Посмотримъ теперь, *какъ найти интегрирующій множитель.* Пусть онъ для суммы $Xdx+Ydy$ есть M; тогда произведеніе $M(Xdx+Ydy)$ или сумма $MXdx+MYdy$ будетъ полнымъ дифференціаломъ; слѣдовательно:

$$\frac{\partial(MX)}{\partial y}=\frac{\partial(MY)}{\partial x},$$

или:

$$M\frac{\partial X}{\partial y}+X\frac{\partial M}{\partial y}=M\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial M}{\partial x},$$

или:

$$M\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=Y\frac{\partial M}{\partial x}-X\frac{\partial M}{\partial y}\qquad (A)$$

Вотъ уравненіе, которому удовлетворяетъ множитель M. Въ него входятъ и самъ множитель, и его частныя производныя по x и по y. По этому *розысканіе интегрирующихъ множителей приводится къ интегрированію уравненія въ частныхъ производныхъ,*— уравненія съ тремя перемѣнными x, y и M, между которыми M зависимая, а x и y независимы.

Разсмотримъ простѣйшіе частные случаи, въ которыхъ одинъ изъ интегрирующихъ множителей легко отыскивается. Одного и достаточно, чтобы съ помощію его проинтегрировать уравненіе.

535. Пусть для двучлена $Xdx + Ydy$ существуетъ *интегрирующій множитель, зависящій только отъ x*, и множитель этотъ M; тогда для него имѣемъ: $\frac{\partial M}{\partial y} = 0$, и по этому уравненіе ($A$) обращается въ слѣдующее:

$$M\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = Y\frac{\partial M}{\partial x},\ \text{откуда:}\ \frac{\frac{\partial M}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}}{Y}.$$

Такъ какъ M, а слѣдовательно и $\frac{\partial M}{\partial x}$, зависятъ, по условію, только отъ x, то отношеніе $\frac{\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}}{Y}$ не содержитъ y. По этому прежде розыскиванія множителя, зависящаго только отъ x, мы по даннымъ коэффиціентамъ X и Y составимъ это отношеніе. Если оно не содержитъ y, то это послужитъ признакомъ существованія множителя, зависящаго только отъ x. Предполагая отношеніе не содержащимъ y, обозначимъ его чрезъ $\varphi(x)$; тогда:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x}}{M} = \varphi(x),\ \ lM = \int \varphi(x)\,dx,\ \ M = e^{\int\varphi(x)dx}$$

Также нашли бы, что при существованіи *интегрирующаго множителя, зависящаго только отъ y*, отношеніе $\frac{\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}}{X}$ не содержитъ x,—и тогда, обозначая это отношеніе чрезъ $\varphi_1(y)$, а соотвѣтствующій множитель чрезъ M_1, получили-бы:

$$lM_1 = \int \varphi_1(y)\,dy,\ \ M_1 = e^{\int\varphi_1(y)dy}.$$

Примѣры:

а) $$(x^3 + x^3 lx + 2y)\,dx + (3x^3y^2 - x)\,dy = 0.$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2,\ \frac{\partial Y}{\partial x} = 9x^2y^2 - 1,\ \frac{\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}}{Y} = \frac{2-(9x^2y^2-1)}{3x^3y^2-x} = -\frac{3}{x};$$

$$M = e^{-\int_1^x \frac{3dx}{x}} = e^{-3lx} = \frac{1}{x^3};$$

$$\left(1+lx+\frac{2y}{x^3}\right)dx+\left(3y^2-\frac{1}{x^2}\right)dy=0,$$

$$\int_0^y\left(3y^2-\frac{1}{x^2}\right)dy+\int_1^x(1+lx)\,dx=y^3-\frac{y}{x^2}+xlx,$$

$$y^3-\frac{y}{x^2}+x\,lx=C \qquad \text{(полный интегралъ)}$$

b)
$$(2xy^2-y)\,dx+(y^2+x+y)\,dy=0;$$

$$x^2-\frac{x}{y}+y+ly=C.$$

c)
$$(5xy^3+5x+4\cos y)\,dx+(2x^2y-x\sin y)\,dy=0;$$

$$x^5+x^5y^2+x^4\cos y=C.$$

d)
$$y\cos^2 y\,(1-y\sin x)\,dx-(y^2+x\cos^2 y)\,dy=0;$$

$$\frac{x}{y}+\cos x-\operatorname{tg} y=C.$$

536. Для *линейнаго уравненія*:

$$(Xy+X_1)\,dx+dy=0 \qquad (\text{n}^0\ 524),$$

въ которомъ X и X_1 функціи x, существуетъ интегрирующій множитель, зависящій только отъ x. Введемъ его $\left(e^{\int Xdx}\right)$ въ уравненіе; получимъ:

$$(Xy+X_1)\,e^{\int Xdx}dx+e^{\int Xdx}dy=0.$$

Интегрированіе послѣдняго уравненія доставитъ:

$$ye^{\int Xdx}+\int X_1e^{\int Xdx}dx=C,$$

или (обозначая интегралъ $\int Xdx$ чрезъ $\varphi(x)$):

$$y=\left[C-\int X_1e^{\varphi(x)}dx\right]e^{-\varphi(x)}$$

537. Для суммы $Xdx+Ydy$, когда въ ней X и Y *однородныя функціи съ однимъ и тѣмъ же показателемъ однородности*, существуетъ *интегрирующій множитель*, также *однородный*.

Найдемъ его. Пусть k показатель однородности функцій X и Y, а l показатель однородности искомаго множителя M; тогда функціи MX и MY будутъ однородными съ показателемъ однородности $k+l$. По свойству однородныхъ функцій (n° 112), имѣемъ:

$$x\frac{\partial(MX)}{\partial x}+y\frac{\partial(MX)}{\partial y}=(k+l)MX \qquad (a)$$

$$x\frac{\partial(MY)}{\partial x}+y\frac{\partial(MY)}{\partial y}=(k+l)MY \qquad (b)$$

Но сумма: $MXdx+MYdy$ есть полный дифференціалъ; стало-быть коэффиціенты MX и MY удовлетворяютъ условію:

$$\frac{\partial(MX)}{\partial y}=\frac{\partial(MY)}{\partial x},$$

и поэтому равенства (a) и (b) можно представить такъ:

$$x\frac{\partial(MX)}{\partial x}+y\frac{\partial(MY)}{\partial x}=(k+l)MX,$$

$$x\frac{\partial(MX)}{\partial y}+y\frac{\partial(MY)}{\partial y}=(k+l)MY,$$

или:

$$\frac{\partial(MXx)}{\partial x}-MX+\frac{\partial(MYy)}{\partial x}=(k+l)MX,$$

$$\frac{\partial(MXx)}{\partial y}+\frac{\partial(MYy)}{\partial y}-MY=(k+l)MY,$$

откуда:

$$\frac{\partial M(Xx+Yy)}{\partial x}=(k+l+1)MX,$$

$$\frac{\partial M(Xx+Yy)}{\partial y}=(k+l+1)MY.$$

Искомый множитель возьмемъ такимъ, чтобы показатель однородности его былъ $-(k+1)$, т. е. $l=-(k+1)$; тогда:

$$\frac{\partial M(Xx+Yy)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial M(Xx+Yy)}{\partial y}=0,$$

и слѣдовательно произведеніе $M(Xx+Yy)$ постоянное. Принимая его равнымъ 1-цѣ получимъ:

$$M=\frac{1}{Xx+Yy}.$$

Вводя эту дробь множителемъ въ сумму $Xdx + Ydy$, получимъ полный дифференціалъ. Стало-быть полный интегралъ однороднаго уравненія:

$$Xdx + Ydy = 0$$

можно представить подъ видомъ:

$$\int_a^x \frac{Xdx}{Xx+Yy} + \int_b^y \frac{Y_a\,dy}{X_a a + Y_a y} = C.$$

538. Если въ однородномъ уравненіи

$$Xdx + Ydy = 0$$

двучленъ $Xdx + Ydy$ есть полный дифференціалъ, то для него извѣстны два интегрирующихъ множителя, одинъ 1-ца, другой: $\frac{1}{Xx+Yy}$. Поэтому, когда сумма $Xx+Yy$ не приводится къ постоянной величинѣ, полный интегралъ взятаго уравненія, по n° 533, будетъ:

$$Xx + Yy = C.$$

Примѣры:

a) $$(4x^3 + 3y^3)\,dx + (9xy^2 - 8y^3)\,dy = 0\,,$$

$$x^4 + 3xy^3 - 2y^4 = C.$$

b) $$\left(3x^2 + 2xy\cos\frac{y}{x} + y^2\sin\frac{y}{x}\right)dx + \left(x^2\cos\frac{y}{x} - xy\sin\frac{y}{x}\right)dy = 0\,,$$

$$x^3 + x^2 y\cos\frac{y}{x} = C.$$

Уравненія перваго порядка, нелинейныя относительно производной.

539. Уравненіе, алгебрическое относительно y', но выше первой степени, имѣетъ видъ:

$$y'^n + P_1 y'^{n-1} + P_2 y'^{n-2} + \ldots + P_{n-2} y'^2 + P_{n-1} y' + P_n = 0,$$

гдѣ: $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ функціи x и y. Если корни его: Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ и Q_n (функціи x и y), то оно приводится къ:

$$(y'-Q_1)(y'-Q_2)\ldots.(y'-Q_{n-1})(y'-Q_n)=0,$$

и стало-быть разбивается на n линейныхъ уравненій:

$$y'-Q_1=0,\ y'-Q_2=0,\ldots,y'-Q_n=0.$$

Интегрируя каждое изъ послѣднихъ, получимъ n интеграловъ подъ видомъ:

$$\varphi_1(x,y,C_1)=0,\ \varphi_2(x,y,C_2)=0,\ldots,\ \varphi_n(x,y,C_n)=0,$$

которые можно заключить всѣ въ одно уравненіе:

$$\varphi_1(x,y,C_1)\,\varphi_2(x,y,C_2)\ldots..\varphi_n(x,y,C_n)=0.$$

Это одно заключаетъ въ себѣ n уравненій, изъ которыхъ въ каждомъ по одной постоянной произвольной.

Примѣры:

a) Уравненіе: $y'^2-2xy'+x^2-y^2=0$ даетъ: $y'=x\pm y$, — и поэтому, представляясь подъ видомъ:

$$(y'-x-y)(y'-x+y)=0.$$

разбивается на два:

$$y'-x-y=0,\ y'-x+y=0.$$

Интегралъ перваго: $y=Ce^x-x-1$;

интегралъ втораго: $y=Ce^{-x}+x-1$;

а соединяя оба интеграла въ одно уравненіе, получимъ:

$$(y+x+1-Ce^x)(y-x+1-Ce^{-x})=0.$$

b) *Найти кривыя съ такимъ свойствомъ, чтобы разстояніе каждой точки отъ начала координатъ равнялось длинѣ опредѣленной нормали въ той же точкѣ.*

Квадратъ разстоянія точки (x, y) отъ начала координатъ при осяхъ прямоугольныхъ: x^2+y^2. Квадратъ длины опредѣленной нормали: $y^2(1+y'^2)$. Поэтому вопросъ приводится къ уравненію:

$$y^2(1+y'^2)=x^2+y^2, \text{ или: } y^2y'^2-x^2=0;$$

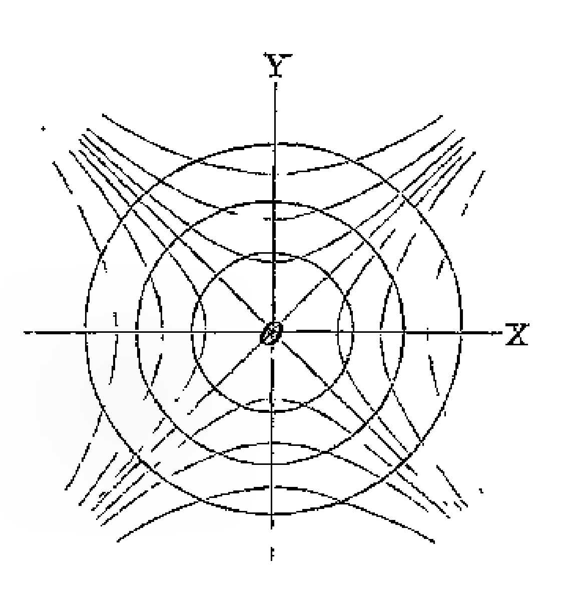
а послѣднее разбивается на два слѣдующихъ:

$$yy'+x=0, \quad yy'-x=0.$$

Интегралъ перваго: $x^2+y^2=C$,

интегралъ втораго: $x^2-y^2=C_1$ *).

Стало быть искомыя кривыя — круги, центры которыхъ въ началѣ координатъ, и равнобочныя гиперболы, оси которыхъ на осяхъ координатъ. Сверхъ того вопросу удовлетворяютъ общія ассимптоты послѣднихъ гиперболъ; уравненія ихъ получаются изъ уравненія $x^2-y^2=C_1$ при $C_1=0$; они будутъ: $x-y=0$ и $x+y=0$.



540. Если въ уравненіе не входятъ x и y, а только y', т. е. если оно имѣетъ видъ:

$$f(y')=0,$$

гдѣ f алгебрическая или трансцендентная функція, то, разрѣшая его относительно y', получимъ:

$$y'=a,$$

*) Постоянная произвольная C можетъ принимать только положительныя значенія, а C_1 положительныя, отрицательныя и ноль

гдѣ a постоянное, имѣющее одно, нѣсколько или безчисленное множество значеній, смотря по свойству функціи f. По этому:

$$y = ax + C \quad \text{(полный интегралъ)}.$$

Такъ какъ изъ послѣдняго уравненія имѣемъ: $a = \frac{y - C}{x}$, то полный интегралъ даннаго уравненія можно представить и подъ видомъ:

$$f\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0.$$

Примѣры:

a)
$$y' - \operatorname{tg} y' = 0,$$

$$\frac{y-C}{x} - \operatorname{tg}\frac{y-C}{x} = 0.$$

b)
$$y'^3 + 4y'^2 + y' - 6 = 0;$$

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + 4\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + \frac{y-C}{x} - 6 = 0,$$

$$(y-C)^3 + 4x(y-C)^2 + x^2(y-C) - 6x^3 = 0.$$

Иначе. Корни функціи $(y'^3 + 4y'^2 + y' - 6)$ относительно y': $1, -2$ и -3; по этому:

$$y'^3 + 4y'^2 + y' - 6 = (y'-1)(y'+2)(y'+3),$$

и уравненіе разбивается на три:

$$y' - 1 = 0, \; y' + 2 = 0, \; y' + 3 = 0,$$

интегралы которыхъ:

$$y = x + C, \; y = -2x + C, \; y = -3x + C;$$

а соединяя эти интегралы въ одно уравненіе, получимъ:

$$(y - x - C)(y + 2x - C)(y + 3x - C) = 0.$$

541. Уравненіе, не содержащее x и линейное относительно y, приводится къ виду:

$$y = f(y').$$

Обозначая y' чрезъ p, и дифференцируя его, получимъ:

$$dy = f'(p)dp, \text{ или: } pdx = f'(p)dp;$$

откуда:

$$dx = \frac{f'(p)}{p}dp, \quad x = \int \frac{f'(p)}{p}dp.$$

Пусть послѣдній интегралъ $\varphi(p) + C$; тогда интегралъ даннаго уравненія получится выключеніемъ p изъ уравненій:

$$y = f(p), \quad x = \varphi(p) + C.$$

Примѣры:

a) $$y = 1 + y'^3;$$

$$y = 1 + \frac{2x+C}{3}\sqrt{\frac{2x+C}{3}}, \text{ или: } (y-1)^2 = \left(\frac{2x+C}{3}\right)^3.$$

b) $$y = y'\, l(y');$$

$$y = (\sqrt{2x+C} - 1)e^{\sqrt{2x+C} - 1}$$

542. Уравненіе, несодержащее y и линейное относительно x:

$$x = f(y').$$

Дифференцируя его, обозначая при этомъ y', какъ и прежде, чрезъ p, получимъ:

$$dx = f'(p)\,dp,$$

откуда:

$$pdx = pf'(p)\,dp, \text{ или: } dy = pf'(p)\,dp.$$

Стало-быть, если

$$\int pf'(p)\,dp = \xi(p) + C,$$

то полный интегралъ даннаго уравненія найдется исключеніемъ p изъ уравненій:

$$x = f(p), \quad y = \xi(p) + C.$$

Примѣры:

a) $$x=\frac{1+y'}{y'^3};$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1+p}{p^3} \\ y&=\frac{2}{p}+\frac{3}{2p^2}+C \end{aligned}\right\}\text{ (исключить } p\text{)}$$ *).

b) $$x=y'+\cos(y');$$

$$\left.\begin{aligned} x&=p+\cos p \\ y&=\frac{p^2}{2}+p\cos p-\sin p+C \end{aligned}\right\}\text{ (исключить } p\text{).}$$

543. Уравненіе, содержащее x и y и линейное какъ относительно x, такъ и относительно y, приводится къ виду:

$$y=xf(y')+\varphi(y').$$

Обозначаемъ y' опять чрезъ p и дифференцируемъ:

$$y=xf(p)+\varphi(p),\ \ dy=f(p)\,dx+xf'(p)\,dp+\varphi'(p)\,dp,$$

$$[f(p)-p]\,dx+xf'(p)dp+\varphi'(p)\,dp=0.$$

Дѣлимъ на $f(p)-p$, считая $f(p)$ отличнымъ отъ p:

$$dx+\frac{f'(p)}{f(p)-p}x\,dp+\frac{\varphi'(p)}{f(p)-p}dp=0.$$

Принимая въ послѣднемъ уравненіи p за перемѣнную независимую, а x разсматривая какъ функцію p, мы видимъ, что оно относительно x и dx (или относительно x и производной x по p) линейное,—и потому интегрированіе его приведется къ квадратурамъ (n° 524). Пусть полный интегралъ его:

$$\psi(x,p,C)=0;$$

---

*) Исключеніе тутъ легко выполнить: изъ втораго уравненія выразить $\frac{1}{p}$ и подставить въ первое.

тогда, исключая p изъ совокупности уравненій:

$$y = xf(p) + \varphi(p), \ \ \psi(x, p, C) = 0,$$

получимъ полный интегралъ даннаго уравненія.

Въ частномъ случаѣ, когда $f(p) = p$, т. е. когда данное уравненіе есть:

$$y = xy' + \varphi(y'),$$

имѣемъ:

$$[x + \varphi'(p)]\, dp = 0;$$

тогда $dp = 0$, откуда $p = C$; и потому полный интегралъ тогда будетъ:

$$y = Cx + \varphi(C).$$

Сверхъ того, исключая p изъ уравненій:

$$y = xp + \varphi(p), \ \ x + \varphi'(p) = 0,$$

получимъ особенный интегралъ.

Примѣры:

a) $$y = xy'^2 + y'^3;$$

$$\left.\begin{aligned} & y = xp^2 + p^3 \\ & x = \frac{3p^2 - 2p^3 + C}{2(p-1)^2} \end{aligned}\right\} \text{(исключить } p\text{)}.$$

b) $$y = xy' + y'^2;$$

$$y = Cx + C^2 \qquad \text{(полный интегралъ);}$$

$$y = -\frac{x^2}{4} \qquad \text{(особенный интегралъ).}$$

Въ примѣрѣ (b) особенному интегралу соотвѣтствуетъ парабола, вершина которой въ началѣ координатъ, а ось идетъ по оси ординатъ въ сторону отрицательныхъ ординатъ; полному же интегралу — система прямыхъ, касательныхъ къ этой параболѣ.

544. **Уравненіе, содержащее x и y, и линейное относительно y:**

$$y = f(x, y').$$

Дифференцируя его, получимъ:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial p}\, dp \qquad (y' = p),$$

или:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) dx + \frac{\partial f}{\partial p}\, dp = 0.$$

Коэффиціенты послѣдняго уравненія — функціи x и p, и притомъ оно — линейное относительно dx и dp. Пусть полный интегралъ его:

$$\xi\,(x, p, C) = 0;$$

тогда полный интегралъ даннаго будетъ результатомъ исключенія p изъ совокупности уравненій:

$$y = f\,(x, p),\ \ \xi\,(x, p, C) = 0.$$

Примѣръ:

$$y = x^2 + y'^2.$$

$$y = x^2 + p^2, \qquad (y' = p)$$

$$p dx = 2x\, dx + 2p\, dp,\ \ (2x - p)\, dx + 2p\, dp = 0;$$

$$l\,(2p^2 - px + 2x^2) + \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arc\,tg} \frac{4p - x}{x\sqrt{15}} = C;$$

$$p^2 = y - x^2,\ \ p = \sqrt{y - x^2},$$

$$l\left(2y - x\sqrt{y - x^2}\right) + \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arc\,tg} \frac{4\sqrt{y - x^2} - x}{x\sqrt{15}} = C.$$

545. Уравненіе, содержащее x и y, и линейное относительно x:

$$x = f\,(y, y') = f\,(y, p) \qquad (p = y').$$

Дифференцируемъ его и потомъ множимъ на p:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp,\ \ dy = p\frac{\partial f}{\partial y} dy + p\frac{\partial f}{\partial p} dp,$$

$$\left(p\frac{\partial f}{\partial y} - 1\right) dy + p\frac{\partial f}{\partial p} dp = 0.$$

Послѣднее уравненіе, съ двумя перемѣнными y и p, линейное

относительно дифференціаловъ этихъ перемѣнныхъ. Пусть полный интегралъ его:

$$\psi(y, p, C) = 0;$$

тогда полный интегралъ даннаго уравненія найдется исключеніемъ p изъ совокупности:

$$x = f(y, p), \ \psi(y, p, C) = 0.$$

Примѣръ:

$$x = yy' + y^2 y'^2 - y^2.$$

$$x = yp + y^2 p^2 - y^2, \qquad (p = y')$$

$$dx = pdy + ydp + 2yp^2\, dy + 2y^2\, pdp - 2y\, dy,$$

$$dy = p^2\, dy + yp\, dp + 2yp^3\, dy + 2y^2 p^2\, dp - 2yp\, dy,$$

$$(p^2 - 1 + 2yp^3 - 2yp)\, dy + (yp + 2y^2 p^2)\, dp = 0,$$

$$(1 + 2yp)\,[(p^2 - 1)\, dy + py\, dp] = 0;$$

$$(p^2 - 1)\, dy + py\, dp = 0, \ \frac{dy}{y} + \frac{pdp}{p^2-1} = 0,$$

$$ly + \frac{1}{2} l(p^2 - 1) = \frac{1}{2} lC, \ y^2(p^2 - 1) = C.$$

По исключеніи p изъ совокупности $\left(\begin{matrix} y^2(p^2-1) - C \\ x = yp + y^2 p^2 - y^2 \end{matrix}\right)$, получимъ:

$$(x - C)^2 - y^2 = C \quad \text{(полный интегралъ).}$$

Сверхъ того данное уравненіе имѣетъ особенный интегралъ, который найдемъ, исключая p изъ совокупности:

$$1 + 2yp = 0, \ x = yp + y^2 p^2 - y^2;$$

онъ будетъ: $y^2 = -x - \frac{1}{4}$.

Особенные интегралы.

546. *Особенный интегралъ* (особенное рѣшеніе) дифференціальнаго уравненія нельзя разсматривать, какъ частный случай полнаго

интеграла; другими словами: его нельзя получить изъ полнаго, приписывая въ послѣднемъ постоянной произвольной C опредѣленное значеніе. Но всегда можно подобрать для C такую функцію, которая обратитъ полный интегралъ въ особенный. Дѣйствительно: пусть полный интегралъ уравненія: $f(x, y, y') = 0$ есть: $y = \varphi(x, C)$, а особенный: $y = \xi(x)$; тогда, разрѣшая уравненіе: $\varphi(x, C) = \xi(x)$ относительно C, мы найдемъ искомую функцію. Такъ, въ примѣрѣ b nº 543 полный интегралъ уравненія: $y = xy' + y'^2$ есть: $y = Cx + C^2$, а особенный: $y = -\frac{x^2}{4}$, и послѣдній получится изъ перваго, если въ первомъ сдѣлаемъ: $C = -\frac{x}{2}$; въ примѣрѣ nº 545 особенный интегралъ получится изъ полнаго, если въ полномъ положимъ: $C = \frac{2x+1}{2}$.

Представимъ *полный интегралъ* уравненія:

$$(a) \qquad f(x, y, y') = 0$$

подъ видомъ:

$$(b) \qquad \psi(x, y, C) = 0,$$

и посмотримъ, какъ изъ него получить *особенный*.

Разумѣя подъ C такую функцію x, при которой (b) обращается въ особенный интегралъ уравненія (a), продифференцируемъ (b); получимъ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} y' + \frac{\partial\psi}{\partial C} C' = 0.$$

Отсюда:

$$(c) \qquad y' = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} - \frac{\frac{\partial\psi}{\partial C}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} C'.$$

Пусть (a) даетъ: $y' = \xi(x, y)$; по этому:

$$-\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} - \frac{\frac{\partial\psi}{\partial C}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} C' = \xi(x, y).$$

Но мы знаемъ, что отношеніе $-\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}$, если въ немъ выключить C

помощію (b), тождественно съ функціею $\xi(x, y)$ (n° 518); слѣдовательно:

$$\frac{\frac{\partial\omega}{\partial C}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}\,C' = 0.$$

Отсюда видимъ, что (b) удовлетворитъ (a), когда $C' = 0$, и стало-быть C постоянное (это соотвѣтствуетъ полному интегралу), или когда:

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial C}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} = 0,$$

и стало-быть или $\frac{\partial\psi}{\partial C} = 0$, или $\frac{\partial\psi}{\partial y} = \infty$.

Слѣдовательно особенные интегралы уравненія (a) можно получить, исключая C изъ уравненій:

$$(\partial) \qquad \psi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial C} = 0,$$

или изъ уравненій:

$$(e) \qquad \psi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \infty.$$

Разлагая совокупность уравненій:

$$\psi(x, y, C) = 0, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial C} : \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0,$$

для исключенія изъ нихъ C, на двѣ совокупности: (∂) и (e), мы предполагаемъ, что въ первой $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ не 0, во второй $\frac{\partial\psi}{\partial C}$ не ∞. Въ противномъ случаѣ отношеніе $\left(\frac{\partial\psi}{\partial C} : \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$, принимая неопредѣленную форму $\left(\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty}\right)$, можетъ и не обратиться въ 0, — и по этому результатъ исключенія C изъ (∂) или изъ (e) можетъ привести къ функціи и не удовлетворяющей уравненію (a).

Вообще, чтобы узнать, будетъ-ли онъ особеннымъ интеграломъ уравненія (a), мы продифференцируемъ его; если онъ не удовлетворитъ (a), то не будетъ интеграломъ (a) ни частнымъ, ни особеннымъ; если же удовлетворитъ, то будетъ особеннымъ интеграломъ, когда не представитъ частнаго случая полнаго.

Полный интегралъ уравненія (a) можно представить въ разныхъ формахъ:

$$\psi(x, y, C) = 0,\ \psi_1(x, y, C) = 0,\ \psi_{11}(x, y, C) = 0, \ldots;$$

но каждая изъ этихъ формъ приводитъ y къ одной и той же функціи x и C (n° 517); а такъ какъ уравненіе $\psi(x, y, C) = 0$ даетъ:

$$\frac{\partial y}{\partial C} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial C}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}},$$

то отсюда заключаемъ, что и отношеніе $\left(\frac{\partial \psi}{\partial C} : \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$ остается однимъ и тѣмъ же, будетъ-ли интегралъ представленъ въ той или другой формѣ. Стало-быть особенные интегралы не измѣнятся отъ измѣненія формы полнаго интеграла:

Примѣры:

a) $$y = xy' + y'^2 \quad \text{(примѣръ } b \text{ n° 543).}$$

$$Cx + C^2 - y = 0 \quad \text{(полный интегралъ).}$$

Дифференцируемъ его по C:

$$x + 2C = 0.$$

Выключая C изъ двухъ послѣднихъ уравненій, находимъ:

$$y = -\frac{x^2}{4} \quad \text{(особенный интегралъ)}$$

b) $$x = yy' + y^2y'^2 - y^2 \quad \text{(примѣръ n° 545).}$$

$$y^2 - (x - C)^2 + C = 0 \quad \text{(полный интегралъ).}$$

$$2(x - C) + 1 = 0,\ C = x + \frac{1}{2};$$

$$y^2 = -x - \frac{1}{4} \quad \text{(особенный интегралъ).}$$

c) $$4xy'^2 + 6xy' + 3x + y = 0.$$

$$4xp^2 + 6xp + 3x + y = 0, \quad (p = y')$$

$$4p^2\,dx + 8xp\,dp + 6p\,dx + 6x\,dp + 3dx + dy = 0, \quad (dy = p\,dx)$$

$$(4p^2 + 7p + 3)\,dx + x(8p + 6)\,dp = 0,$$

$$(4p + 3)[(p + 1)\,dx + 2x\,dp] = 0.$$

Послѣднему уравненію можно удовлетворить положеніемъ: $(p + 1)\,dx + 2x\,dp = 0$, или положеніемъ: $4p + 3 = 0$.

Первое положеніе, $(p + 1)\,dx + 2x\,dp = 0$, даетъ:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2dp}{p+1} = 0, \text{ откуда: } (p+1)^2 x = C.$$

Исключеніе p приводитъ къ полному интегралу:

$$(x + y + 4C)^2 - 4Cx = 0,$$

которому, обозначая $4C$ одной буквой C, можемъ дать видъ:

$$(x + y + C)^2 - Cx = 0;$$

особенный же найдется исключеніемъ C изъ уравненій:

$$(x + y + C)^2 - Cx = 0, \quad 2(x + y + C) - x = 0;$$

онъ будетъ:

$$3x + 4y = 0, \text{ или: } y = -\frac{3}{4}x.$$

Второе положеніе, $4p + 3 = 0$, приведетъ къ тому же особенному интегралу, когда изъ него и даннаго уравненія выключимъ p.

d) $$(x - 3y)\,y'^2 + 6yy' - 4y = 0;$$

$$(x - y - C)^2 - Cy = 0 \quad \text{(полный интегралъ)},$$

$$y = 0, \quad 4x - 3y = 0 \quad \text{(особенные интегралы)}.$$

547. Найти кривую съ такимъ свойствомъ, чтобы произведеніе разстояній касательной къ ней отъ двухъ постоянныхъ точекъ F и F' было постоянное.

Примемъ прямую, проходящую чрезъ F и F', за ось OX, средину FF' за начало координатъ, а за ось OY—прямую, перпенди-

кулярную къ OX. Половину длины FF' обозначимъ чрезъ c; тогда координаты точки F будутъ: c и 0, точки F': $-c$ и 0. Уравненіе касательной въ точкѣ $K(x, y)$:

$$Y-y=y'(X-x), \text{ или: } y'(X-x)+y-Y=0;$$

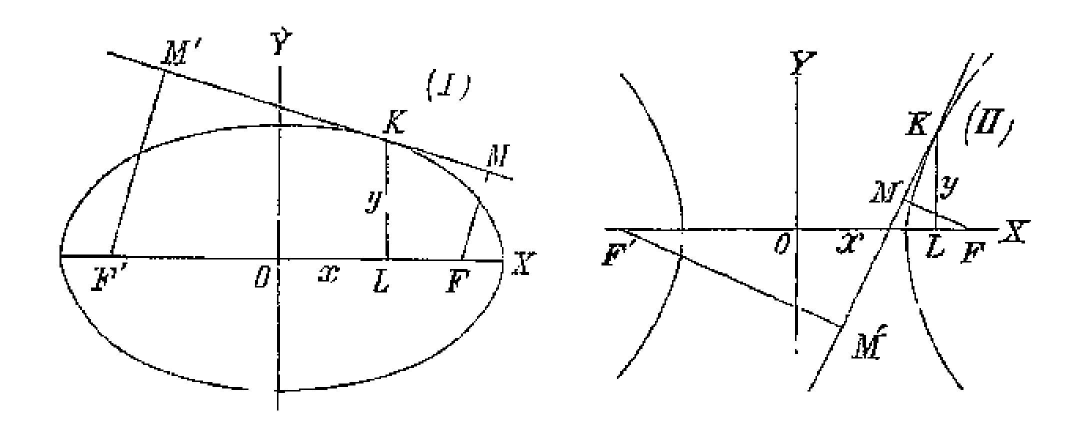
разст. отъ F до касательной = абс. вел. $\dfrac{cy'-xy'+y}{\sqrt{1+y'^2}}=FM$,

разст. отъ F' до касательной = абс. вел. $\dfrac{-cy'-xy'+y}{\sqrt{1+y'^2}}=F'M'$.

Постоянное произведеніе $FM \cdot F'M'$ пусть b^2; тогда:

$$\frac{cy'-xy'+y}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\frac{-cy'-xy'+y}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{(y-xy')^2-c^2y'^2}{1+y'^2}=\theta b^2,$$

гдѣ $\theta=1$, когда точки F и F' находятся по одну сторону касательной (черт. I), и $\theta=-1$, когда — по разныя (черт. II).



Послѣднее уравненіе даетъ:

$$(y-xy')^2-c^2y'^2+\theta b^2+\theta b^2y'^2$$

$$=(c^2+\theta b^2)y'^2+\theta b^2.$$

Сумма $c^2+\theta b^2$ — положительная какъ при $\theta=1$, такъ и при $\theta=-1$. Дѣйствительно, при $\theta=-1$ имѣемъ:

$$(y-xy')^2=(c^2-b^2)y'^2-b^2,$$

и если-бы $c^2 - b^2$ было менѣе 0, то вторая часть послѣдняго равенства была-бы отрицательною, — что невозможно, потому что первая — положительная. Обозначая по этому сумму $c^2 + \theta b^2$ чрезъ a^2, получимъ:

$$(y - xy')^2 = a^2 y'^2 + \theta b^2,$$

откуда:

$$y - xy' = \sqrt{a^2 y'^2 + \theta b^2}, \tag{A}$$

или, обозначая y' чрезъ p:

$$y - xp = \sqrt{a^2 p^2 + \theta b^2}.$$

Дифференцируя это уравненіе, получимъ:

$$-xdp = \frac{a^2 p dp}{\sqrt{a^2 p^2 + \theta b^2}}, \text{ или: } \left(x + \frac{a^2 p}{\sqrt{a^2 p^2 + \theta b^2}}\right) dp = 0.$$

Полагая $dp = 0$, имѣемъ: $p = C$; по этому полный интегралъ уравненія (A) будетъ:

$$y = Cx + \sqrt{a^2 C^2 + \theta b^2};$$

а положеніе: $x + \frac{a^2 p}{\sqrt{a^2 p^2 + \theta b^2}} = 0$ приведетъ къ особенному интегралу; оно вмѣстѣ съ $y = xp + \sqrt{a^2 p^2 + \theta b^2}$ даетъ:

$$\frac{x}{a} = -\frac{ap}{\sqrt{a^2 p^2 + \theta b^2}}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\theta b}{\sqrt{a^2 p^2 + \theta b^2}};$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \theta \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 p^2 + \theta b^2}{a^2 p^2 + \theta b^2} = 1;$$

стало-быть особенный интегралъ уравненія (A) будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \theta \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

И такъ:

при $\theta = 1$ $\begin{cases} y = Cx + \sqrt{a^2 C^2 + b^2} & \text{(полный интегралъ)}, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{(особенный)}; \end{cases}$

$$\text{при } \theta = -1 \begin{cases} y = Cx + \sqrt{a^2C^2 - b^2} & \text{(полный интегралъ)}, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{(особенный)}. \end{cases}$$

Въ первомъ случаѣ особенному интегралу соотвѣтствуетъ эллипсъ, котораго фокусы въ данныхъ точкахъ F и F', полуоси: a и b, а полному интегралу — система прямыхъ линій, касательныхъ къ этому эллипсу; во второмъ случаѣ особенному интегралу соотвѣтствуетъ гипербола, фокусы которой F и F', полуоси: a и b, а полному — система прямыхъ, касательныхъ къ гиперболѣ.

Примѣняя послѣднюю теорію, мы получили-бы особенный интегралъ исключеніемъ C изъ полнаго интеграла и уравненія, составляемаго дифференцированіемъ его по C, т. е. изъ уравненій:

$$y = Cx + \sqrt{a^2C^2 + \theta b^2},\ x + \frac{a^2C}{\sqrt{a^2C^2 + \theta b^2}} = 0.$$

548. **Съ геометрической точки зрѣнія** *особенный интегралъ* уравненія: $f(x, y, y') = 0$, получаемый исключеніемъ C изъ уравненій:

$$\psi(x, y, C) = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial C} = 0,$$

можно разсматривать какъ уравненіе линіи, *обертывающей* систему линій, соотвѣтствующихъ полному интегралу (см. n⁰ 193); другими словами: полному интегралу соотвѣтствуютъ линіи *обертываемыя*, особенному — *обертывающая*.

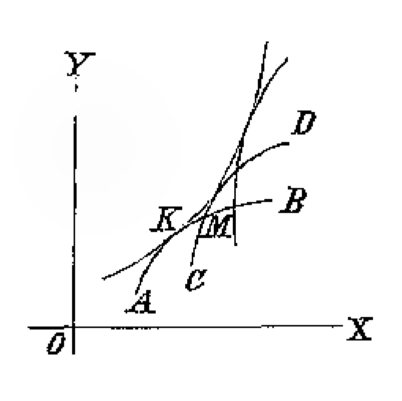
Послѣдній особенный интегралъ можно найти и независимо отъ полнаго, а именно исключеніемъ p изъ уравненій:

$$f(x, y, p) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Дѣйствительно: для точки M, общей двумъ смежнымъ кривымъ обертываемымъ AB и CD, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, p) &= 0 \\ f(x, y, p + \Delta p) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ или: } \begin{cases} f(x, y, p) = 0 \\ \frac{f(x, y, p+\Delta p) - f(x, y, p)}{\Delta p} = 0. \end{cases}$$

p и $p + \Delta p$ — угловые коэффиціенты касательныхъ къ линіямъ AB



и CD въ общей точкѣ M. Для точки K—предѣльнаго положенія точки M:

$$f(x,y,p)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial p}=0.$$

Исключая p изъ этихъ уравненій, получимъ зависимость между координатами точекъ обертывающей линіи (уравненіе обертывающей), т. е. особенный интегралъ.

Примѣры:

a) $$y=xy'+y'^2 \quad (\text{примѣръ } b \text{ n}^0\ 543);$$

$$\left.\begin{array}{l} y=xp+p^2 \\ 0=x+2p \end{array}\right\}\ y=-\frac{x^2}{4}.$$

b) $$x=yy'+y^2y'^2-y^2 \quad (\text{примѣръ n}^0\ 545);$$

$$\left.\begin{array}{l} x=yp+y^2p^2-y^2 \\ 0=y+2y^2p \end{array}\right\}\ y^2=-x-\frac{1}{4}.$$

c) $$4xy'^2+6xy'+3x+y=0 \quad (\text{примѣръ } c \text{ n}^0\ 546);$$

$$\left.\begin{array}{l} 4xp^2+6xp+3x+y=0 \\ 8xp+6x=0 \end{array}\right\}\ y=-\frac{3}{4}x.$$

d) $$(x-3y)y'^2+6yy'-4y=0 \quad (\text{примѣръ } \partial \text{ n}^0\ 546);$$

$$\left.\begin{array}{l} (x-3y)p^2+6yp-4y=0 \\ (x-3y)p+3y=0 \end{array}\right\}\ y=\frac{4}{3}x,\ y=0.$$

e) $$y-xy'=\sqrt{a^2y'^2+\theta b^2} \quad (\text{n}^0\ 547);$$

$$\left.\begin{array}{l} y-xp=\sqrt{a^2p^2+\theta b^2} \\ -x=\dfrac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2+\theta b^2}} \end{array}\right\}\ \frac{x^2}{a^2}+\theta\frac{y^2}{b^2}=1.$$

f) $$y^2 - 2xyy' + (1+x^2)y'^2 - 1 = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} y^2 - 2xyp + (1+x^2)p^2 - 1 = 0 \\ -xy + (1+x^2)p = 0 \end{aligned}\right\} y^2 = 1 + x^2.$$

Функція, найденная исключеніемъ p изъ $f = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$, представитъ тогда особенный интегралъ уравненія $f = 0$, когда она удовлетворитъ уравненію и не будетъ его частнымъ интеграломъ. Возможны случаи, когда функція, такимъ образомъ найденная, не удовлетворяетъ данному уравненію, и тогда она не будетъ интеграломъ, ни частнымъ, ни особеннымъ. Для примѣра возьмемъ уравненіе:

$$y'^2 + yy' + x = 0.$$

Примѣняя къ нему послѣдній пріемъ, получимъ:

$$p^2 + yp + x = 0, \ 2p + y = 0.$$

Исключеніе p изъ этихъ уравненій дастъ: $y^2 = 4x$, откуда: $y = 2\sqrt{x}$. Функція $2\sqrt{x}$, подставленная на мѣсто y во взятое уравненіе, не удовлетворитъ ему, и стало-быть не будетъ его интеграломъ, ни частнымъ, ни особеннымъ.

Интегрированіе уравненій высшихъ порядковъ.

549. Уравненіе вида: $f(x, y^{(n)}) = 0$, и при томъ линейное относительно $y^{(n)}$, приводится къ слѣдующему:

$$y^{(n)} = \varphi(x).$$

Полный интегралъ его найдется послѣдовательнымъ интегрированіемъ; онъ будетъ:

$$y = \int^{(n)} \varphi(x)\,dx^n = \psi(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

гдѣ $\psi(x)$ — функція, которой n-ая производная равна $\varphi(x)$.

550. *Чтобы проинтегрировать* уравненіе вида:

$$f(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,$$

положимъ: $y^{(n-1)} = p$; тогда оно приведется къ уравненію перваго порядка:

$$f(x, p, p') = 0.$$

Пусть полный интегралъ послѣдняго: $\psi\ (x,\ p,\ C) = 0$.

Подставляя $y^{(n-1)}$ на мѣсто p, получимъ:

$$\psi\ (x,\ y^{(n-1)},\ C) = 0,$$

— уравненіе $(n-1)$-го порядка. Если оно — линейное относительно $y^{(n-1)}$, интегралъ его найдется послѣдовательнымъ интегрированіемъ.

Примѣръ: $\qquad xy''' + y'' = x + 1;$

$$y = \frac{x^3 + 6x^2}{12} + C_1 x l x + C_2 x + C_3\,.$$

551. **Если уравненіе не содержитъ** y, т. е. имѣетъ видъ:

$$f\ (x,\ y',\ y'',\ y''';\ldots;\ y^{(n)}) = 0,$$

то порядокъ его можно понизить на одну единицу положеніемъ: $y' = p$. При такомъ положеніи оно будетъ:

$$f\ (x,\ p,\ p',\ p'',\ \ldots,\ p^{(n-1)}) = 0,$$

и интегрированіе его приводится къ интегрированіямъ уравненій $(n-1)$-го порядка и перваго.

Примѣры:

a) $\qquad xy'' + y' = 3x + 1;\ y = \frac{3x^2}{4} + x + C_1\, lx + C_2\,.$

b) $\qquad xy'' + 2y' = 3x + 1;\ y = \frac{x^2 + x}{2} + C_1 + \frac{C_2}{x},$

552. **Понизить порядокъ уравненія на единицу, когда оно не содержитъ** x, т. е. имѣетъ видъ:

$$f\ (y,\ y',\ y'',\ y''',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0,$$

можно, полагая $y' = p$ и принимая y за независимую перемѣнную. Производныя: y'', y''', $y^{(4)}$, ... въ p и производныхъ p по y будутъ:

$$y'' = p'_x = p'_y \cdot y'_x = p \cdot p'_y,$$

$$y''' = \left(p \cdot p'_y\right)'_x = \left(p \cdot p'_y\right)'_y \cdot y'_x = \left[\left(p'_y\right)^2 + p \cdot p''_y\right] p,$$

$$y^{(4)} = p \cdot \left(p'_y\right)^3 + 4p^2 p'_y p''_y + p^3 p'''_y, \text{ и т. д.}$$

Вообще $y^{(k)}$ выражается въ p и производныхъ p по y порядковъ: 1-го, 2-го, . . . , $(k-1)$-го; по этому, подставляя въ данное уравненіе вмѣсто y', y'', y''', . . . , $y^{(n)}$ выраженія ихъ въ p и производныхъ p по y, получимъ уравненіе вида:

$$\xi\left(y, p, p'_y, p''_y, \ldots, p_y^{(n-1)}\right) = 0,$$

въ которомъ высшая производная $(n-1)$-го порядка.

Иначе: принимая y за независимую перемѣнную, выразимъ производныя y по x въ производныхъ x по y:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, y''_x = -\frac{x''_y}{(x'_y)^3}, \ldots;$$

тогда уравненіе приведется къ виду:

$$\psi\left(y, x'_y, x''_y, x'''_y, \ldots, x_y^{(n)}\right) = 0;$$

затѣмъ, такъ какъ x самъ по себѣ не входитъ въ уравненіе, то положеніемъ $x'_y = u$ оно приведется къ уравненію $(n-1)$-го порядка:

$$\psi\left(y, u, u'_y, u''_y, \ldots, u_y^{(n-1)}\right) = 0.$$

Примѣры:

a) $$yy'' - y'^2 = 0; \; y = C_2 e^{C_1 x}.$$

b) *Найти кривую, которой радіусъ кривизны равнялся-бы длинѣ опредѣленной нормали.*

$$\text{радіусъ кривизны} = \text{абс. вел. } \frac{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{y''};$$

$$\text{длина опред. нормали} = \text{абс. вел. } y\sqrt{1+y'^2};$$

$$\frac{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{y''}=\theta y\sqrt{1+y'^2}, \quad (\theta=\pm 1)$$

$$1+y'^2=\theta yy''.$$

$\theta=-1$, когда y и y'' имѣютъ разные знаки; $\theta=1$, когда знаки y и y'' одинаковы.

Первый случай: $\theta=-1$.

$$1+y'^2=-yy'',\ 1+p^2=-ypp'_y.$$

$$(1+p^2)\,dy+yp\,dp=0,\ \frac{dy}{y}+\frac{pdp}{1+p^2}=0,$$

$$y^2(1+p^2)=C^2,\ y^2+y^2y'^2=C^2,$$

$$yy'=\sqrt{C^2-y^2},\ \frac{ydy}{\sqrt{C^2-y^2}}-dx=0,$$

$$(x+C_1)^2+y^2=C^2$$ (*круги* съ центрами на оси OX).

Второй случай: $\theta=1$.

$$1+y'^2=yy'',\ 1+p^2=ypp'_y,$$

$$(1+p^2)\,dy=yp\,dp,\ C^2y^2=1+p^2,$$

$$y'=\sqrt{C^2y^2-1},\ \frac{dy}{\sqrt{C^2y^2-1}}=dx,\ \frac{Cdy}{\sqrt{C^2y^2-1}}=Cdx,$$

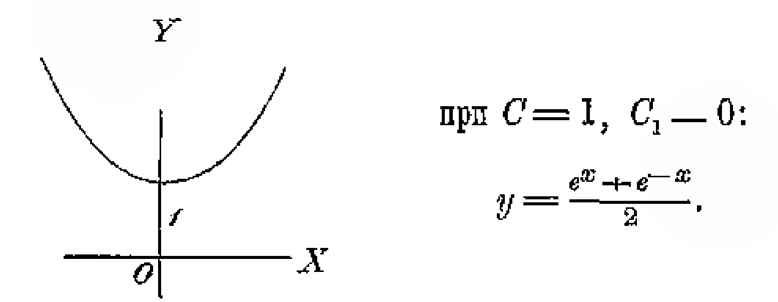
$$l(Cy+\sqrt{C^2y^2-1})=Cx+C_1,$$

$$Cy+\sqrt{C^2y^2-1}=e^{Cx+C_1},\ Cy-\sqrt{C^2y^2-1}=e^{-(Cx+C_1)}$$ *),

$$y=\frac{e^{Cx+C_1}+e^{-(Cx+C_1)}}{2C}$$ (*цѣпныя линіи*).

---

*) Это равенство получается изъ предыдущаго помноженіемъ на $(Cy-\sqrt{C^2y^2-1})\,e^{-(Cx+C_1)}$.



при $C = 1$, $C_1 = 0$:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

553. Порядокъ уравненія, однороднаго въ отношеніи къ y, y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$, можно понизить на единицу, принимая ly за новую зависимую перемѣнную. Обозначая ly чрезъ z, имѣемъ:

$$y = e^z,\ y' = e^z \cdot z',\ y'' = e^z (z'^2 + z''),\ y''' = e^z (z'^3 + 3z'z'' + z'''), \ldots .$$

e^z входитъ множителемъ во всѣ производныя y; по этому если показатель однородности даннаго уравненія относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ есть k, то, замѣняя y и производныя y выраженіями ихъ въ z и производныхъ z, мы увидимъ, что всѣ члены уравненія будутъ имѣть общимъ множителемъ e^{kz}. Сокращая на него, мы приведемъ уравненіе къ виду:

$$\varphi(x, z', z'', z''', \ldots, z^{(n)}) = 0;$$

а такъ какъ въ этомъ послѣднемъ уравненіи z самъ по себѣ не входитъ, то, полагая $z' = u$, мы сдѣлаемъ его уравненіемъ $(n-1)$-го порядка:

$$\varphi(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}) = 0.$$

Примѣръ:

$$y'' - 2xy' + x^2 y = 0.$$

Показатель однородности относительно y, y' и y'' здѣсь единица. Полагая $y = e^z$, сокращая на e^z и обозначая потомъ z' чрезъ u, получимъ:

$$z'' + z'^2 - 2xz' + x^2 = 0,$$

$$u' + u^2 - 2xu + x^2 = 0, \text{ или: } u' + (u - x)^2 = 0.$$

Положимъ: $u-x=v$; тогда:

$$u'=1+v',\ 1+v'+v^2=0,\ (1+v^2)\,dx+dv=0,$$

$$dx+\frac{dv}{1+v^2}=0,\ x+\operatorname{arc\,tg} v=C,\ v=\operatorname{tg}(C-x);$$

$$u=x+\operatorname{tg}(C-x),\ dz=[x+\operatorname{tg}(C-x)]\,dx,$$

$$z=\int[x+\operatorname{tg}(C-x)]\,dx=\frac{x^2}{2}+l\cos(C-x)+l\,C_1,$$

$$y=C_1e^{\frac{x^2}{2}}\cos(C-x) \qquad \text{(полный интегралъ).}$$

Если положить: $C_1\cos C=c$, $C_1\sin C=c_1$, то полный интегралъ представится подъ видомъ:

$$y=e^{\frac{x^2}{2}}(c\cos x+c_1\sin x), \qquad \left(\begin{matrix}c \text{ и } c_1 \text{ постоянныя}\\ \text{произвольныя}\end{matrix}\right).$$

554. *Чтобы проинтегрировать* уравненіе вида:

$$f(y^{(n-1)}, y^{(n)})=0,$$

положимъ: $y^{(n-1)}=p$; тогда оно приведется къ уравненію перваго порядка:

$$f(p, p')=0.$$

Пусть это уравненіе дастъ:

$$p'=\varphi(p).$$

Отсюда: $dp=\varphi(p)\,dx,\ dx=\frac{dp}{\varphi(p)},\ x=\int\frac{dp}{\varphi(p)}.$

Если послѣдній интегралъ есть $\xi(p)+C$, и если мы въ состояніи разрѣшить уравненіе

$$x=\xi(p)+C$$

относительно p, то искомая функція y найдется послѣдовательнымъ интегрированіемъ по x; а именно: обозначая функцію, обратную ξ, чрезъ ψ, имѣемъ:

$$p=\psi(x-C),\ \ y=\int^{(n-1)}\psi(x-C)\,dx^{n-1}.$$

Если не въ состояніи выразить p въ x, то обращаемся къ уравненію: $dx=\frac{dp}{\varphi(p)}$; оно даетъ:

$$pdx=\frac{pdp}{\varphi(p)},\ \text{или:}\ y^{(n-1)}dx=\frac{pdp}{\varphi(p)};$$

по этому:

$$y^{(n-2)}=\int\frac{pdp}{\varphi(p)}.$$

Пусть послѣдній интегралъ есть $\xi_1(p)+C_1$; тогда:

$$y^{(n-2)}dx=\xi_1(p)\,dx+C_1\,dx=\frac{\xi_1(p)}{\varphi(p)}dp+C_1\,dx,$$

$$y^{(n-3)}=\int\frac{\xi_1(p)}{\varphi(p)}dp+C_1x+C_2.$$

Продолжая такимъ образомъ и далѣе, мы наконецъ получимъ y подъ видомъ:

$$y=\Theta(p)+c_1x^{n-2}+c_2x^{n-3}+\ldots+c_{n-2}x+c_{n-1};$$

а присоединяя сюда: $x=\xi(p)+C$, и исключая p, получимъ искомый полный интегралъ.

Примѣры:

a) $$y'''=y''^3.$$

$$y''=p;\ p'=p^3,\ dx=\frac{dp}{p^3},\ x=\int\frac{dp}{p^3}=-\frac{1}{2p^2}+C;$$

$$y'=p=\frac{1}{\sqrt{C_1-2x}},\quad (2C\ \text{мы обозначили чрезъ}\ C_1)$$

$$y'=\int\frac{dx}{\sqrt{C_1-2x}}=-\sqrt{C_1-2x}+C_2,$$

$$y=\frac{(C_1-2x)\sqrt{C_1-2x}}{3}+C_2x+C_3\quad(\text{полный интегралъ}).$$

Иначе:

$$y''dx=pdx=\frac{dp}{p^2},$$

$$y' = \int \frac{dp}{p^2} = -\frac{1}{p} + C_2,$$

$$y'\,dx = -\frac{dx}{p} + C_2\,dx = -\frac{dp}{p^4} + C_2\,dx,$$

$$y = -\int \frac{dp}{p^4} + \int C_2\,dx = \frac{1}{3p^3} + C_2 x + C_3.$$

Исключая p изъ совокупности $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{3p^3} + C_2 x + C_3 \\ x = -\frac{1}{2p^2} + C \end{array} \right\}$, получимъ:

$$y = \frac{(C_1 - 2x)\sqrt{C_1 - 2x}}{3} + C_2 x + C_3. \quad (2C = C_1)$$

b) $\qquad y'''y'' = 1;\ y = \frac{(2x + C_1)^2\sqrt{2x + C_1}}{15} + C_2 x + C_3.$

555. **Уравненіе вида:** $f\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$. Пусть оно, по разрѣшеніи относительно $y^{(n)}$, даетъ:

$$y^{(n)} = \varphi\left(y^{(n-2)}\right), \text{ или: } p'' = \varphi(p) \text{ (полагая } y^{(n-2)} = p).$$

Обозначимъ p' чрезъ q; тогда:

$$p'' = q' = q'_p\,p' = q'_p \cdot q = \frac{q\,dq}{dp},$$

$$q\,dq = \varphi(p)\,dp,\ \frac{q^2}{2} = \int \varphi(p)\,dp,$$

$$q = \sqrt{2\int \varphi(p)\,dp} = \frac{dp}{dx},\ dx = \frac{dp}{\sqrt{2\int \varphi(p)\,dp}},$$

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\int \varphi(p)\,dp}}.$$

Выполняя два послѣднихъ интегрированія, получимъ уравненіе вида: $x = \psi(p, C_1) + C_2$. Если разрѣшимъ его относительно p, то послѣдовательнымъ интегрированіемъ результата $n - 2$ раза по x найдемъ y.

Иначе: интегрируя

$$y^{(n-2)}\,dx = p\,dx = \frac{p\,dp}{\sqrt{2\int \varphi(p)\,dp}},$$

обозначая при этомъ интегралъ $\int \frac{pdp}{\sqrt{2\int \varphi(p)\,dp}}$ чрезъ $\xi(p, C_1) + C_3$, находимъ:

$$y^{(n-3)} = \int \frac{pdp}{\sqrt{2\int \varphi(p)\,dp}} = \xi(p, C_1) + C_3,$$

$$y^{(n-3)}dx = \xi(p, C_1)\,dx + C_3\,dx = \frac{\xi(p, C_1)\,dp}{\sqrt{2\int \varphi(p)\,dp}} + C_3\,dx,$$

$$y^{(n-4)} = \int \frac{\xi(p, C_1)\,dp}{\sqrt{2\int \varphi(p)\,dp}} + C_3 x + C_4.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, получимъ наконецъ уравненіе вида:

$$y = \Theta(p, C_1) + c_3 x^{n-3} + c_4 x^{n-4} + \ldots + c_{n-1}x + c_n;$$

а присоединяя къ нему $x = \psi(p, C_1) + C_3$ и исключая p, получимъ искомый интегралъ.

Примѣры:

a) $yy''^3 = 1;$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{y}},\ y' = p,\ y'' = \frac{pdp}{dy},\ pdp = \frac{dy}{\sqrt[3]{y}},$$

$$\frac{p^2}{2} = 2\sqrt{y} + 2C,\ p = 2\sqrt{\sqrt{y} + C},\ dx = \frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y} + C}},$$

$$x = \frac{2}{3}\left(\sqrt{y} - 2C\right)\sqrt{\sqrt{y} + C} + C_1 \quad \text{(полный интегралъ).}$$

b) $y^{(4)} + y'' = 0;$

$$y'' = p,\ y^{(4)} = p'',\ p' = q,\ p'' = \frac{qdq}{dp},$$

$$p'' + p = 0,\ qdq + pdp = 0,\ q^2 + p^2 = C^2,$$

$$q = \sqrt{C^2 - p^2},\ \frac{dp}{dx} = \sqrt{C^2 - p^2},\ dx = \frac{dp}{\sqrt{C^2 - p^2}},$$

$$x + C_2 = \arcsin\frac{p}{C},\ p = C\sin(x + C_2),$$

$$y' = C\int \sin(x + C_2)\,dx = -C\cos(x + C_2) + C_3,$$

$$y = -C\int \cos(x + C_2)\,dx + \int C_3\,dx = C_1 \sin(x + C_2) + C_3 x + C_4.$$

($-C$ обозначено чрезъ C_1).

Если обозначимъ $C_1 \cos C_2$ и $C_1 \sin C_2$ чрезъ c_1 и c_2 (c_1 и c_2 новыя постоянныя произвольныя), то полный интегралъ уравненія: $y^{(4)} + y'' = 0$ представится такъ:

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + C_3 x + C_4,$$

или, изображая постоянныя произвольныя буквами одного размѣра:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 x + C_4.$$

556. Уравненіе втораго порядка, однородное въ отношеніи къ x, y, dx, dy и d^2y, приводится къ уравненіямъ перваго порядка. Положимъ:

$$(a) \qquad \frac{y}{x} = u,\ y' = p,\ y''x = q;$$

тогда u, p и q будутъ нулеваго измѣренія, и если

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

есть данное уравненіе, то функція $f(x, y, y', y'')$ или $f\left(x, ux, p, \frac{q}{x}\right)$ приведется къ виду: $x^k \varphi(u, p, q)$, гдѣ k показатель однородности, а данное уравненіе обратится въ слѣдующее:

$$\varphi(u, p, q) = 0.$$

Пусть отсюда:

$$q = \xi(u, p).$$

Такъ какъ положенія (a) даютъ:

$$dy = u\,dx + x\,du = p\,dx,\ y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{q}{x},$$

то:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{q} \text{ или: } \frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{\xi(u, p)}.$$

Если полный интегралъ уравненія: $\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{\xi(u, p)}$ есть:

$$p = \psi(u, C),$$

то:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\psi(u, C) - u}, \quad lx = \int \frac{du}{\psi(u, C) - u}.$$

Когда выполнимъ послѣднее интегрированіе, замѣнимъ u отношеніемъ $\frac{y}{x}$.

Примѣры:

a) $$x^2 y'' + xy' = y;$$

$$x^2 \cdot \frac{q}{x} + x \cdot p = xu, \quad q + p = u, \quad q = u - p,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{u-p},$$

$$dp = -du, \quad p = C - u,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{C-2u}, \quad (2u - C)x^2 = C_1, \quad \left(\frac{2y}{x} - C\right)x^2 = C_1,$$

$$2xy - Cx^2 = C_1, \quad y - \frac{Cx}{2} + \frac{C_1}{2x},$$

$$y = cx + \frac{c_1}{x} \quad \left(\text{обозначая } \frac{C}{2} \text{ и } \frac{C_1}{2} \text{ чрезъ } c \text{ и } c_1\right).$$

b) $$x^2 y'' + xyy' = y^2; \quad y = -x + 2\,Cx \operatorname{tg}(C_1 - Clx).$$

c) $$x^3 y'' = (y - xy')^2; \quad y = xl\frac{x}{C + C_1 x}.$$

Линейныя уравненія безъ послѣдняго члена.

557. Общій видъ линейнаго (относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$) уравненія безъ послѣдняго члена:

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + X_2 y^{(n-2)} + \ldots + X_{n-2} y'' + X_{n-1} y' + X_n y = 0, \quad (a)$$

гдѣ коэффиціенты $X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1}$ и X_n функціи x или постоянныя числа.

Если функціи y_1 и y_2 удовлетворяютъ этому уравненію, то и сум-

ма ихъ удовлетворитъ ему, и произведенія ихъ на произвольныя постоянныя. Въ этомъ легко удостовѣримся простой подстановкой на мѣсто y суммы y_1+y_2 или произведенія Cy_1. Вообще, если

$$y=y_1, \ y=y_2, \ y=y_3, \ \ldots, \ y=y_m,$$

— частные интегралы разсматриваемаго уравненія, то и

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+\ldots+C_my_m \quad \left(\begin{matrix} C_1, C_2, \ldots, C_m \\ \text{пост. произвольныя} \end{matrix}\right)$$

будетъ его интеграломъ. Если m равно n, и между функціями $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ нѣтъ линейной зависимости, то этотъ интегралъ будетъ полнымъ. При существованіи же линейной зависимости между $y_1, y_2, \ldots, y_n$, число постоянныхъ произвольныхъ въ суммѣ: $C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+\ldots+C_ny_n$ приводится къ меньшему n, и тогда интегралъ будетъ не полнымъ.

Пусть напримѣръ функціи y_1, y_2 и y_3 связаны линейнымъ уравненіемъ:

$$a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3=0; \quad (a_1, \ a_2 \text{ и } a_3 \text{ постоянныя})$$

тогда y_3 выразится линейнымъ образомъ въ y_1 и y_2:

$$y_3=-\frac{a_1}{a_3}y_1-\frac{a_2}{a_3}y_2;$$

по этому:

$$C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=\left(C_1-\frac{a_1}{a_3}C_3\right)y_1+\left(C_2-\frac{a_2}{a_3}C_3\right)y_2;$$

а обозначая суммы $C_1-\frac{a_1}{a_3}C_3$ и $C_2-\frac{a_2}{a_3}C_3$, какъ постоянныя произвольныя, чрезъ c_1 и c_2, получимъ:

$$C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=c_1y_1+c_2y_2,$$

откуда видимъ, что часть $C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$ интеграла, заключающая въ себѣ повидимому три постоянныхъ произвольныхъ, приводится къ двучлену $c_1y_1+c_2y_2$, содержащему ихъ только двѣ.

558. Докажемъ, что **въ полный интегралъ уравненія** (a) **всѣ постоянныя произвольныя входятъ линейнымъ образомъ**; другими словами — интегралъ этотъ имѣетъ видъ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n.$$

Сначала докажемъ это для линейныхъ уравненій перваго и втораго порядка. Уравненіе перваго порядка:

$$y' + X_1 y = 0, \text{ или: } \frac{dy}{y} + X_1 dx = 0,$$

даетъ:

$$ly = -\int X_1 dx, \quad y = e^{-\int X_1 dx}$$

Пусть $\int X_1 dx = \psi(x) + C$; тогда, обозначая $e^{-\psi(x)}$ чрезъ y_1, а e^{-C} чрезъ C_1, имѣемъ:

$$y = C_1 y_1,$$

откуда и видимъ, что постоянная произвольная C_1 входитъ въ полный интегралъ взятаго уравненія линейнымъ образомъ.

Обратимся теперь къ уравненію втораго порядка:

$$y'' + X_1 y' + X_2 y = 0.$$

Пусть одинъ изъ частныхъ интеграловъ его есть: $y = y_1$, такъ что:

$$y_1'' + X_1 y_1' + X_2 y_1 = 0;$$

полному же интегралу его дадимъ видъ: $y = y_1 z$, откуда:

$$y' = y_1' z + y_1 z', \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'';$$

тогда уравненіе для опредѣленія множителя z будетъ:

$$y_1 z'' + (2y_1' + X_1 y_1) z' + (y_1'' + X_1 y_1' + X_2 y_1) z = 0.$$

Такъ какъ коэффиціентъ при z равенъ 0, то оно принимаетъ видъ:

$$z'' + Pz' = 0, \ \left(P = \frac{2y_1' + X_1 y_1}{y_1}\right)$$

и положеніемъ $z' = u$ приводится къ уравненію:

$$u' + Pu = 0,$$

— линейному относительно u и u', безъ послѣдняго члена, и при томъ перваго порядка. Полный интегралъ послѣдняго уравненія, уравненія перваго порядка, какъ уже доказано, имѣетъ видъ: $u = C_1 u_1$; слѣдовательно:

$$z = \int u\,dx = C_1 \int u_1\,dx,\ \ y = C_1 y_1 \int u_1\,dx.$$

Если $\int u_1\,dx = \xi(x) + C$, то, обозначая CC_1 чрезъ C_2 имѣемъ:

$$y = C_1 y_1 \xi(x) + C_2 y_1.$$

Стало-быть и въ полный интегралъ уравненія втораго порядка постоянныя произвольныя входятъ линейнымъ образомъ.

Теперь докажемъ, что это свойство имѣютъ линейныя уравненія всѣхъ порядковъ. Допуская его по отношенію къ уравненію какого-нибудь опредѣленнаго порядка, мы сейчасъ увидимъ, что оно принадлежитъ и уравненію на единицу высшаго порядка. Пусть $y = y_1$ одинъ изъ частныхъ интеграловъ уравненія (a); тогда, представляя полный интегралъ его подъ видомъ: $y = y_1 z$, откуда:

$$y' = y_1' z + y_1 z'$$

$$y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

. . . .

. . . .

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} z + n y_1^{(n-1)} z' + \frac{n(n-1)}{1.2} y_1^{(n-2)} z'' + \ldots + y_1 z^{(n)},$$

и опираясь на тождество:

$$y_1^{(n)} + X_1 y_1^{(n-1)} + X_2 y_1^{(n-2)} + \ldots + X_{n-2} y_1'' + X_{n-1} y_1' + X_n y_1 = 0,$$

мы уравненіе (a) приведемъ къ виду:

$$z^{(n)} + P_1 z^{(n-1)} + P_2 z^{(n-2)} + \ldots + P_{n-2} z'' + P_{n-1} z' = 0,$$

гдѣ $P_1, P_2, \ldots, P_{n-2}$ и P_{n-1} функціи x. Если же положить: $z' = u$, то оно обратится въ слѣдующее:

$$(b)\qquad u^{(n-1)} + P_1 u^{(n-2)} + P_2 u^{(n-3)} + \ldots + P_{n-2} u' + P_{n-1} u = 0,$$

—линейное же, какъ и (a), но низшаго порядка, а именно $(n-1)$-го.

Допустимъ, что въ полный интегралъ его постоянныя произвольныя входятъ линейнымъ образомъ, т. е. интегралъ этотъ имѣетъ видъ:

$$(c) \qquad u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_{n-1} u_{n-1};$$

тогда:

$$z = \int u\,dx = C_1 \int u_1\,dx + C_2 \int u_2\,dx + \ldots + C_{n-1} \int u_{n-1}\,dx,$$

$$y = C_1 y_1 \int u_1\,dx + C_2 y_1 \int u_2\,dx + \ldots + C_{n-1} y_1 \int u_{n-1}\,dx.$$

Если положимъ:

$$\int u_1\,dx = v_1 + c_1, \int u_2\,dx = v_2 + c_2, \ldots, \int u_{n-1}\,dx = v_{n-1} + c_{n-1},$$

и обозначимъ сумму: $C_1 c_1 + C_2 c_2 + \ldots + C_{n-1} c_{n-1}$ (число постоянное, но произвольное) чрезъ C_n, то

$$y = C_1 y_1 v_1 + C_2 y_1 v_2 + \ldots + C_{n-1} y_1 v_{n-1} + C_n y_1.$$

Отсюда видимъ, что, при сдѣланномъ допущенiи, и въ интегралъ уравненiя n-го порядка постоянныя произвольныя входятъ также линейнымъ образомъ.

Само собою разумѣется, что, представляя интегралъ уравненiя (b) подъ видомъ (c), мы не допускаемъ между функцiями $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ линейной зависимости; въ противномъ случаѣ интегралъ былъ-бы не полнымъ. Подобной зависимости нѣтъ и между функцiями: $y_1 v_1, y_1 v_2, \ldots, y_1 v_{n-1}$ и y_1,—потому что если допустить послѣднюю, т. е. положить:

$$a_1 y_1 v_1 + a_2 y_1 v_2 + \ldots + a_{n-1} y_1 v_{n-1} + a_n y_1 = 0,$$

то, по сокращенiи на y_1 и дифференцированiи, получили-бы:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_{n-1} u_{n-1} = 0,$$

—линейную зависимость между $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, противорѣчащую положенiю.

Линейныя уравненiя съ постоянными коэффицiентами.

559. Если коэффицiенты линейнаго уравненiя

$$(1) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

постоянные, то легко подобрать такое значеніе α, при которомъ показательная функція $e^{\alpha x}$ удовлетворитъ уравненію.

Полагая $y = e^{\alpha x}$, имѣемъ:

$$y' = \alpha e^{\alpha x},\ y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}, \ldots,\ y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

Подставимъ въ (1); получимъ:

$$e^{\alpha x}(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\alpha^2 + a_{n-1}\alpha + a_n) = 0.$$

Стало-быть функція $e^{\alpha x}$ удовлетворитъ уравненію (1), когда въ ней α будетъ корнемъ уравненія:

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\alpha^2 + a_{n-1}\alpha + a_n = 0.$$

Пусть корни этого уравненія: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$; тогда:

$$(2) \qquad y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots + C_n e^{\alpha_n x}$$

будетъ интеграломъ уравненія (1). Если между корнями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ нѣтъ равныхъ, то интегралъ этотъ будетъ полнымъ, — потому что тогда, распоряжаясь количествами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, мы можемъ сдѣлать $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ при данномъ значеніи x какими угодно. Желая выбрать $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такими, чтобы при $x = x_0$ функціи $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ приняли значенія $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ (произвольно заданныя числа), представимъ сначала постоянныя произвольныя $C_1, C_2, \ldots, C_n$ въ видѣ произведеній: $c_1 e^{-\alpha_1 x_0}, c_2 e^{-\alpha_2 x_0}, \ldots, c_n e^{-\alpha_n x_0}$ ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ будутъ новыя постоянныя произвольныя); тогда послѣднее уравненіе и уравненія, которыя получимъ изъ него дифференцированіемъ, будутъ слѣдующія:

$$y = c_1 e^{\alpha_1(x-x_0)} + c_2 e^{\alpha_2(x-x_0)} + \ldots + c_n e^{\alpha_n(x-x_0)}$$

$$y' = \alpha_1 c_1 e^{\alpha_1(x-x_0)} + \alpha_2 c_2 e^{\alpha_2(x-x_0)} + \ldots + \alpha_n c_n e^{\alpha_n(x-x_0)}$$

$$y'' = \alpha_1^2 c_1 e^{\alpha_1(x-x_0)} + \alpha_2^2 c_2 e^{\alpha_2(x-x_0)} + \ldots + \alpha_n^2 c_n e^{\alpha_n(x-x_0)}$$

. . . .

. . . .

$$y^{(n-1)} = \alpha_1^{n-1} c_1 e^{\alpha_1(x-x_0)} + \alpha_2^{n-1} c_2 e^{\alpha_2(x-x_0)} + \ldots + \alpha_n^{n-1} c_n e^{\alpha_n(x-x_0)}.$$

Подставляя въ нихъ x_0 на мѣсто x, и имѣя въ виду заданныя при этомъ значенія $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, получимъ:

$$y_0 = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n$$

$$y_0' = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 + \ldots + \alpha_n c_n$$

$$y_0'' = \alpha_1^2 c_1 + \alpha_2^2 c_2 + \alpha_3^2 c_3 + \ldots + \alpha_n^2 c_n$$

. . . .

. . . .

$$y_0^{(n-1)} = \alpha_1^{n-1} c_1 + \alpha_2^{n-1} c_2 + \alpha_3^{n-1} c_3 + \ldots + \alpha_n^{n-1} c_n.$$

Остается показать, что количества $c_1, c_2, \ldots, c_n$, удовлетворяющія этой системѣ уравненій, примутъ возможныя и опредѣленныя значенія. Введемъ въ уравненія множители: $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, и сложимъ произведенія; тогда, полагая для краткости:

$$\lambda_{n-1} y_0^{(n-1)} + \lambda_{n-2} y_0^{(n-2)} + \ldots + \lambda_2 y_0'' + \lambda_1 y_0' + \lambda_0 y_0 = A,$$

$$\lambda_{n-1} \alpha^{n-1} + \lambda_{n-2} \alpha^{n-2} + \ldots + \lambda_2 \alpha^2 + \lambda_1 \alpha + \lambda_0 = \xi(\alpha),$$

получимъ:

$$A = c_1 \xi(\alpha_1) + c_2 \xi(\alpha_2) + c_3 \xi(\alpha_3) + \ldots + c_n \xi(\alpha_n).$$

$\xi(\alpha)$ цѣлая функція α $(n-1)$-ой степени; коэффиціенты ея $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0$ числа произвольныя. Выберемъ эти коэффиціенты такими, чтобы корнями функціи $\xi(\alpha)$ были: $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, — всѣ корни функціи

$$\psi(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-2} \alpha^2 + a_{n-1} \alpha + a_n$$
$$= (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3) \ldots (\alpha - \alpha_n),$$

кромѣ α_1. Для этого возьмемъ:

$$\xi(\alpha) = (\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3) \ldots (\alpha - \alpha_n) = \frac{\psi(\alpha)}{\alpha - \alpha_1}.$$

Коэффиціенты $\xi(\alpha)$ найдутся, стало-быть, дѣленіемъ $\psi(\alpha)$ на $\alpha - \alpha_1$; они будутъ:

$$\lambda_{n-1} = 1, \ \lambda_{n-2} = \alpha_1 + a_1, \ \lambda_{n-3} = \alpha_1^2 + a_1 \alpha_1 + a_2, \ldots$$

Обозначая A, соотвѣтствующее такому выбору коэффиціентовъ, чрезъ A_1, имѣемъ:

$$A_1 = c_1\,\xi(\alpha_1) = c_1\left[\frac{\psi(\alpha)}{\alpha-\alpha_1}\right]_{\alpha_1} = c_1\,\psi'(\alpha_1),$$

откуда:

$$c_1 = \frac{A_1}{\psi'(\alpha_1)} = \frac{A_1}{\xi(\alpha_1)} = \frac{A_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\,\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}.$$

Видимъ, что c_1 принимаетъ возможное и вполнѣ опредѣленное значеніе. Тоже относится и къ $c_2, c_3, \ldots, c_n$ *). Стало-быть и для $C_1, C_2, \ldots, C_n$ всегда найдемъ возможныя и вполнѣ опредѣленныя значенія, при которыхъ: $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ примутъ для $x = x_0$ данныя значенія: $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$.

И такъ, если между корнями: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ функціи $\psi(\alpha) = \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\alpha^2 + a_{n-1}\alpha + a_n$ **) нѣтъ равныхъ, полнымъ интеграломъ уравненія (1) будетъ:

$$y = C_1e^{\alpha_1 x} + C_2e^{\alpha_2 x} + C_3e^{\alpha_3 x} + \ldots + C_ne^{\alpha_n x}.$$

Примѣры:

a) $$y'' + 2y' - 3y = 0;$$

корни функціи $(\alpha^2 + 2\alpha - 3)$: 1 и -3;

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-3x} \quad \text{(полный интегралъ).}$$

b) $$y''' - 13y' - 12y = 0;$$

корни функціи $(\alpha^3 - 13\alpha - 12)$: 4, -1 и -3;

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} + C_3e^{-3x} \quad \text{(полный интегралъ).}$$

c) $$y^{(4)} - 3y''' - y'' + 9y' - 6y = 0;$$

---

*) Для опредѣленія c_2 мы взяли-бы: $\xi(\alpha) = \dfrac{\psi(\alpha)}{\alpha-\alpha_2}$, и стало-быть множители: $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \ldots, \lambda_1, \lambda_0$ были-бы коэффиціенты частнаго отъ дѣленія $\psi(\alpha)$ на $\alpha - \alpha_2$, и т. д.

**) Показатель степени этой цѣлой функціи и ея коэффиціенты равны соотвѣтственно показателю порядка и коэффиціентамъ разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія.

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{x\sqrt{3}} + C_4 e^{-x\sqrt{3}}.$$

d) $$y^{(5)} - 9y''' + 20y' = 0;$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 e^{x\sqrt{5}} + C_5 e^{-x\sqrt{5}}.$$

560. Въ случаѣ, когда между корнями $\psi(\alpha)$ есть *равные*, интегралъ (2) уравненія (1) будетъ неполнымъ.

Такъ, при $\alpha_2 = \alpha_1$, двучленъ $C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$ приводится къ $Ce^{\alpha_1 x}$; при $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1$, трехчленъ $C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x}$ приводится къ $Ce^{\alpha_1 x}$, и т. д.

Чтобы сдѣлать интегралъ полнымъ въ случаѣ двухъ равныхъ корней ($\alpha_2 = \alpha_1$), допустимъ сначала, что эти корни разнятся на количество ω, и потомъ будемъ ω подводить къ 0. Разсматривая часть полнаго интеграла, соотвѣтствующую этимъ двумъ корнямъ, и полагая: $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$, имѣемъ:

$$C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} = \left(C_1 + C_2 e^{\omega x}\right) e^{\alpha_1 x} = \left[C_1 + C_2\left(1 + \omega x + \frac{\omega^2 x^2}{1.2} e^{\theta\omega x}\right)\right] e^{\alpha_1 x}$$

$$= \left(C_1 + C_2 + C_2 \omega x + \frac{C_2 \omega^2}{2} x^2 e^{\theta\omega x}\right) e^{\alpha_1 x} \quad \begin{pmatrix}\theta > 0 \\ < 1\end{pmatrix}.$$

Распоряжаясь постоянными произвольными C_1 и C_2, мы можемъ сумму $C_1 + C_2$ и произведеніе $C_2\omega$ сдѣлать какими угодно; обозначимъ ихъ чрезъ c_1 и c_2; тогда:

$$C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} = \left(c_1 + c_2 x + \frac{c_2 \omega}{2} x^2 e^{\theta\omega x}\right) e^{\alpha_1 x}.$$

Здѣсь c_1 и c_2 новыя постоянныя произвольныя (вмѣсто прежнихъ C_1 и C_2). Съ приближеніемъ α_2 къ α_1, ω подходитъ къ 0; по этому часть полнаго интеграла, соотвѣтствующую двойному корню α_1 можно представить произведеніемъ:

$$(c_1 + c_2 x) e^{\alpha_1 x}.$$

Пусть теперь: $\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha_3 = \alpha_1 + \omega$; тогда часть интеграла, соотвѣтствующая корнямъ α_1 (двойному) и α_3, будетъ:

$$\left(C_1+C_2x\right)e^{\alpha_1 x}+C_3e^{\alpha_3 x}=\left(C_1+C_2x+C_3e^{\omega x}\right)e^{\alpha_1 x}=$$

$$=\left[C_1+C_2x+C_3\left(1+\omega x+\frac{\omega^2x^2}{1.2}+\frac{\omega^3x^2}{1.2.3}e^{\theta\omega x}\right)\right]e^{\alpha_1 x}$$

$$=\left[C_1+C_3+\left(C_2+C_3\omega\right)x+\frac{C_3\omega^2}{2}x^2+\frac{C_3\omega^3}{6}x^3e^{\theta\omega x}\right]e^{\alpha_1 x},$$

или $\left(\text{полагая: } C_1+C_3=c_1,\ C_2+C_3\omega=c_2,\ \frac{C_3\omega^2}{2}=c_3\right)$:

$$\left(C_1+C_2x\right)e^{\alpha_1 x}+C_3e^{\alpha_3 x}=\left(c_1+c_2x+c_3x^2+\frac{c_3\omega}{3}x^3e^{\theta\omega x}\right)e^{\alpha_1 x}.$$

c_1, c_2 и c_3 новыя постоянныя произвольныя. Распоряжаясь прежними, мы можемъ сдѣлать ихъ какими угодно.

Подводя теперь ω къ 0, и стало-быть α_3 къ α_1, мы увидимъ, что часть полнаго интеграла, соотвѣтствующая тройному корню α_1, будетъ:

$$(c_1+c_2x+c_3x^2)\,e^{\alpha_1 x}.$$

Вообще, въ случаѣ k равныхъ корней $(\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_k)$, соотвѣтствующая имъ часть полнаго интеграла будетъ:

$$(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1})e^{\alpha_1 x}.$$

Къ тому же результату приведутъ слѣдующія разсужденія. Возьмемъ произведеніе $p\cdot e^{\alpha x}$ (α постоянное, p функція), и станемъ искать такія α и p, при которыхъ произведеніе удовлетворяло-бы уравненію (1):

$$y=p\cdot e^{\alpha x}$$

$$y'=(\alpha p+p')\,e^{\alpha x}$$

$$y''=(\alpha^2p+2\alpha p'+p'')\,e^{\alpha x}$$

. . . .

. . . .

$$y^{(n-1)}=\left[\alpha^{n-1}p+(n-1)\alpha^{n-2}p'+\frac{(n-1)(n-2)}{1\ 2}\alpha^{n-3}p''+\ldots+(n-1)\alpha p^{(n-2)}+p^{(n-1)}\right]e^{\alpha x}$$

$$y^{(n)} = \left[\alpha^n p + n\alpha^{n-1}p' + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}p'' + \ldots + n\alpha p^{(n-1)} + p^{(n)}\right] e^{\alpha x}$$

Подставляя эти выраженія $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ въ уравненіе (1) и опираясь на равенства:

$$\psi(\alpha) = \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\alpha^2 + a_{n-1}\alpha + a_n$$

$$\psi'(\alpha) = n\alpha^{n-1} + (n-1)a_1\alpha^{n-2} + (n-2)a_2\alpha^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}\alpha + a_{n-1}$$

$$\frac{\psi''(\alpha)}{1.2} = \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a_1\alpha^{n-3} + \ldots + a_{n-2}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\psi^{(n-1)}(\alpha)}{1.2\ldots(n-1)} = n\alpha + a_1$$

$$\frac{\psi^{(n)}(\alpha)}{1.2\ldots n} = 1,$$

получимъ:

$$\left[p\psi(\alpha) + p'\psi'(\alpha) + p''\frac{\psi''(\alpha)}{1.2} + \ldots + p^{(k-1)}\frac{\psi^{(k-1)}(\alpha)}{1.2\ldots(k-1)} + \right.$$

$$\left. + p^{(k)}\frac{\psi^{(k)}(\alpha)}{1.2\ldots k} + \ldots + p^{(n-1)}\frac{\psi^{(n-1)}(\alpha)}{1.2\ldots(n-1)} + p^{(n)}\frac{\psi^{(n)}(\alpha)}{1.2\ldots n}\right] e^{\alpha x} = 0.$$

Если α_1 кратный корень функціи $\psi(\alpha)$ со степенью кратности k, то при $\alpha = \alpha_1$ функціи $\psi(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$, $\psi''(\alpha), \ldots, \psi^{(k-1)}(\alpha)$ обратятся въ 0; въ такомъ случаѣ послѣднему уравненію удовлетворимъ, давая α значеніе α_1, а функцію p подчиняя условію: $p^{(k)} = 0$, откуда:

$$p = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots C_kx^{k-1} \quad \left(\begin{matrix} C_1, C_2, \ldots, C_k \\ \text{пост. произвольныя} \end{matrix}\right).$$

Итакъ искомое произведеніе, удовлетворяющее уравненію (1), (въ предположеніи, что α_1 кратный корень $\psi(\alpha)$ со степенью кратности k) будетъ:

$$(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_kx^{k-1})e^{\alpha_1 x}.$$

Примѣры:

a) $$y'' + 4y' + 4y = 0;$$

корень $(\alpha^2 + 4\alpha + 4)$: -2, двойной;

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x} \quad \text{(полный интегралъ).}$$

b) $$y^{(4)} - 2y'' + y = 0;$$

корни $(\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1)$: 1 и -1, оба двойные;

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{x} + (C_3 + C_4 x) e^{-x} \quad \text{(полный интегралъ).}$$

c) $$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 2y''' - 2y'' - 3y' - y = 0;$$

корни $(\alpha^5 + 3\alpha^4 + 2\alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha - 1)$: 1, одиночный и -1, четверной.

$$y = C_1 e^{x} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2 + C_5 x^3)\, e^{-x}.$$

d) $$y^{(6)} + 5y^{(5)} + y^{(4)} - 37y''' - 86y'' - 76y' - 24y = 0;$$

$$y = C_1 e^{3x} + (C_2 + C_3 x) e^{-x} + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2)\, e^{-2x}.$$

e) $$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 9y^{(4)} + 4y''' - 9y'' - 6y' - y = 0;$$

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{(1+\sqrt{2})x} + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2)\, e^{(1-\sqrt{2})x}.$$

561. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда функція $\psi(\alpha)$ имѣетъ *мнимые корни* при коэффиціентахъ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ вещественныхъ. Тогда часть интеграла уравненія (1), соотвѣтствующая этимъ мнимымъ корнямъ, представится въ мнимой формѣ. Введеніемъ тригонометрическихъ функцій мы легко преобразуемъ ее въ вещественную. Дѣйствительно: такъ какъ коэффиціенты функціи $\psi(\alpha)$ вещественные, то мнимые корни ея будутъ попарно сопряженные, и если мнимый корень кратный, то сопряженный ему также кратный и съ тою же степенью кратности. Пусть:

$$\alpha_1 = a + bi, \; \alpha_2 = a - bi \quad (a \text{ и } b \text{ веществ.});$$

тогда:

$$C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x} = e^{ax}\left(C_1 e^{bxi} + C_2 e^{-bxi}\right)$$

$$= e^{ax}\left[C_1 (\cos bx + i \sin bx) + C_2 (\cos bx - i \sin bx)\right]$$

$$= e^{ax}\left[(C_1 + C_2) \cos bx + (C_1 - C_2)\, i \sin bx\right].$$

Введемъ новыя постоянныя произвольныя, полагая:

$$C_1 + C_2 = c_1, \quad (C_1 - C_2)\, i = c_2;$$

тогда часть интеграла, соотвѣтствующая двумъ сопряженнымъ мнимымъ корнямъ $a + bi$ и $a - bi$, представится подъ видомъ:

$$e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right).$$

Если мнимый корень $a+bi$ двойной, то и сопряженный ему $a-bi$ двойной; тогда, полагая:

$$\alpha_3 = \alpha_1 = a + bi, \quad \alpha_4 = \alpha_2 = a - bi,$$

получимъ:

$$(C_1+C_2x)\, e^{\alpha_1 x} + (C_3+C_4x)\, e^{\alpha_2 x} = e^{ax}\left[(C_1+C_2x)\, e^{bxi} + (C_3+C_4x)\, e^{-bxi}\right]$$

$$= e^{ax}\left[(C_1+C_2x)(\cos bx + i \sin bx) + (C_3+C_4x)(\cos bx - i\sin bx)\right]$$

$$= e^{ax}\left\{\left[C_1+C_3+(C_2+C_4)\, x\right]\cos bx + \left[(C_1-C_3)\, i + (C_2-C_4)\, ix\right]\sin bx\right\};$$

а положеніями:

$$C_1 + C_3 = c_1 \quad \Big| \quad (C_1 - C_3)\, i = c_3$$
$$C_2 + C_4 = c_2 \quad \Big| \quad (C_2 - C_4)\, i = c_4$$

(c_1, c_2, c_3 и c_4 новыя пост. произвольныя),

мы обратимъ послѣднее выраженіе въ слѣдующее:

$$e^{ax}\left[(c_1 + c_2 x)\cos bx + (c_3 + c_4 x)\sin bx\right].$$

Также докажется, что часть полнаго интеграла, отвѣчающая тройнымъ мнимымъ корнямъ $a + bi$ и $a - bi$, будетъ:

$$e^{ax}\left[(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\cos bx + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2)\sin bx\right],$$

и вообще кратнымъ мнимымъ корнямъ $a + bi$ и $a - bi$ со степенью кратности k:

$$e^{ax}\left[(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_k x^{k-1})\cos bx + \right.$$
$$\left. + (C_{k+1} + C_{k+2} x + C_{k+3} x^2 + \ldots + C_{2k} x^{k-1})\sin bx\right].$$

Примѣры:

a) $y'' + 9y = 0;$

корни $(\alpha^2 + 9)$: $3i$ и $-3i$;

$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ (полный интегралъ).

b) $y'' - 2y' + 5y = 0;$

корни $(\alpha^2 - 2\alpha + 5)$: $1 + 2i$ и $1 - 2i$;

$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ (полный интегралъ).

c) $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0;$

$y = e^{-x}(C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x).$

d) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0;$

$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x.$

e) $y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 9y = 0;$

$y = e^x\Big[(C_1 + C_2 x) \cos x\sqrt{2} + (C_3 + C_4 x) \sin x\sqrt{2}\Big].$

f) $4y^{(6)} + 12y^{(5)} + 13y^{(4)} + 6y''' - 3y'' - 4y' - y = 0;$

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\Big[C_1 + C_2 x + C_3 e^{\frac{x\sqrt{5}}{2}} + C_4 e^{-\frac{x\sqrt{5}}{2}} + C_5 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_6 \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\Big].$$

g) $y^{(6)} - 6y^{(5)} + 16y^{(4)} - 18y''' + 39y'' = 0;$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x\sqrt{3} + C_4 \sin x\sqrt{3} + e^{3x}(C_5 \cos 2x + C_6 \sin 2x).$$

Линейныя уравненія съ перемѣнными коэффиціентами.

562. Изъ уравненій съ перемѣнными коэффиціентами разсмотримъ одно, вида:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 (ax+b)^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-2}(ax+b)^2 y'' + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = 0.$$

Чтобы проинтегрировать его, положимъ:

$$y = (ax+b)^\alpha,$$

и станемъ искать тѣ значенія α, при которыхъ эта функція удовлетворитъ уравненію. Дифференцируя ее, получимъ:

$$y' = a\alpha(ax+b)^{\alpha-1}$$

$$y'' = a^2\alpha(\alpha-1)(ax+b)^{\alpha-2}$$

$$y''' = a^3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(ax+b)^{\alpha-3}$$

. . . .

. . . .

$$y^{(n)} = a^n\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}.$$

Подставимъ эти выраженія $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ въ данное уравненіе; получимъ:

$$(ax+b)^\alpha[a^n\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)+a_1a^{n-1}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-2}a^2\alpha(\alpha-1)+a_{n-1}a\alpha+a_n]=0.$$

Отсюда видимъ, что функція $(ax+b)^\alpha$ удовлетворитъ данному уравненію, если α будетъ корнемъ уравненія:

$$a^n\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)+a_1a^{n-1}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}a\alpha+a_n=0.$$

Это уравненіе n-ой степени; пусть его корни: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Если нѣтъ между ними равныхъ, то полный интегралъ даннаго уравненія будетъ:

$$y = C_1(ax+b)^{\alpha_1}+C_2(ax+b)^{\alpha_2}+\ldots\ldots+C_n(ax+b)^{\alpha_n}.$$

Въ случаѣ равенства двухъ корней α_1 и α_2, часть полнаго интеграла, имъ соотвѣтствующая, приметъ видъ:

$$(ax+b)^{\alpha_1}[C_1+C_2\,l(ax+b)];$$

въ случаѣ равенства трехъ корней α_1, α_2 и α_3:

$$(ax+b)^{\alpha_1}\left[C_1+C_2\,l(ax+b)+C_3\left(l(ax+b)\right)^2\right],$$

и вообще въ случаѣ равенства k корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$:

$$(ax+b)^{\alpha_1}\left[C_1+C_2 l(ax+b)+C_3(l(ax+b))^2+\ldots+C_k(l(ax+b))^{k-1}\right].$$

Часть полнаго интеграла, соотвѣтствующая парѣ мнимыхъ сопряженныхъ корней $\gamma+\beta i$ и $\gamma-\beta i$, можетъ быть преобразована въ слѣдующее выраженіе:

$$(ax+b)^{\gamma}\left[C_1\cos(\beta l(ax+b))+C_2\sin(\beta l(ax+b))\right],$$

а мнимыхъ кратныхъ со степенью кратности k:

$$(ax+b)^{\gamma}\left\{\left[C_1+C_2 l(ax+b)+\ldots+C_k(l(ax+b))^{k-1}\right]\cos(\beta l(ax+b))+\right.$$

$$\left.+\left[C_{k+1}+C_{k+2}l(ax+b)+\ldots+C_{2k}(l(ax+b))^{k-1}\right]\sin(\beta l(ax+b))\right\}.$$

Эти заключенія легко получить, если функцію $(ax+b)^{\alpha}$ представить подъ видомъ: $e^{\alpha l(ax+b)}$; тогда, ссылаясь прямо на результаты, полученные въ n° n° 560 и 561, мы увидимъ, что, для полученія результатовъ въ разсматриваемомъ случаѣ, потребуется въ прежнихъ на мѣсто x поставить $l(ax+b)$.

Другой пріемъ интегрированія. Преобразуемъ данное уравненіе въ линейное же, но съ постоянными коэффиціентами. Для этого введемъ новую перемѣнную независимую t, связывая ее съ прежнею уравненіемъ:

$$ax+b=e^t;$$

тогда:

$$x_t'=x_t''=x_t'''=\ldots=\frac{e^t}{a},$$

$$(ax+b)y_x'=ay_t',$$

$$(ax+b)^2y_x''=a^2(y_t''-y_t'),$$

$$(ax+b)^3y_x'''=a^3(y_t'''-3y_t''+2y_t'),\text{ и т. д.}$$

Примѣры:

a) $$(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+y=0.$$

Первый пріемъ рѣшенія:

$$y=(2x+1)^{\alpha},\ y'=2\alpha(2x+1)^{\alpha-1},\ y''=4\alpha(\alpha-1)(2x+1)^{\alpha-2};$$

данное уравненіе приводится къ: $(2x+1)^{\alpha}(4\alpha^2-8\alpha+1)=0$;

корни функціи $(4\alpha^2-8\alpha+1)$: $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$;

полный интегралъ: $y=C_1(2x+1)^{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+C_2(2x+1)^{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

Второй пріемъ:

$$2x+1=e^t,\ (2x+1)y_x'=2y_t',\ (2x+1)^2y_x''=4(y_t''-y_t');$$

уравненіе приводится къ: $4y_t''-8y_t'+y=0$;

полный интегралъ: $y=C_1e^{\frac{2+\sqrt{3}}{2}t}+C_2e^{\frac{2-\sqrt{3}}{2}t}$, или:

$$y=C_1(2x+1)^{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+C_2(2x+1)^{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

b) $$x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=0;$$

$$y=C_1x+C_2x^2+\frac{C_3}{x}.$$

c) $$x^3y'''+xy'-y=0;$$

$$y=x[C_1+C_2lx+C_3(lx)^2].$$

d) $$(x-1)^2y''-3(x-1)y'+5y=0;$$

$$y=(x-1)^2[C_1\cos l(x-1)+C_2\sin l(x-1)].$$

Употребимъ другіе пріемы для интегрированія уравненій (b) и (c). Одинъ изъ частныхъ интеграловъ уравненія:

$$x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=0 \qquad (b)$$

есть: $y=x$; это очевидно. Полный интегралъ его представимъ подъ видомъ $y=xz$; тогда:

$$y'=z+xz',\ y''=2z'+xz'',\ y'''=3z''+xz'''.$$

Подставляя это въ уравненіе (b), получимъ для опредѣленія z уравненіе

$$x^4 z''' + 4x^3 z'' = 0, \text{ или: } xz''' + 4z'' = 0,$$

которое положеніемъ $z'' = u$ приводится къ уравненію перваго порядка:

$$xu' + 4u = 0.$$

Полный интегралъ послѣдняго: $u = \frac{C}{x^4}$; по этому:

$$z'' = \frac{C}{x^4}, \quad z' = -\frac{C}{3x^3} + c_1, \quad z = \frac{C}{6x^2} + c_1 x + c_2,$$

$$y = c_1 x^3 + c_2 x + \frac{c_3}{x}. \qquad \left(\frac{C}{6} \text{ обозначено чрезъ } c_3\right).$$

Уравненіе (c): $x^3 y''' + xy' - y = 0$ имѣетъ однимъ изъ частныхъ интеграловъ также: $y = x$. Представляя полный интегралъ подъ видомъ: $y = xz$, мы приведемъ уравненіе къ слѣдующему:

$$x^4 z''' + 3x^3 z'' + x^2 z' = 0, \text{ или: } x^2 z''' + 3xz'' + z' = 0,$$

а послѣднее положеніемъ $z' = t$ къ уравненію втораго порядка:

$$x^2 t'' + 3xt' + t = 0.$$

Трехчленъ $x^2 t'' + 3xt' + t$ есть производная двучлена $x^2 t' + xt$; по этому:

$$(x^2 t' + xt)' = 0, \text{ откуда:}$$

$$x^2 t' + xt = C, \text{ или: } xt' + t = (xt)' = \frac{C}{x}.$$

Послѣднее уравненіе даетъ:

$$xt = Clx + C_1, \quad t = \frac{Clx + C_1}{x};$$

стало-быть:

$$z = \int \frac{Clx + C_1}{x} dx = \frac{C(lx)^2}{2} + C_1 lx + C_2,$$

$$y = x\left[C_0 (lx)^2 + C_1 lx + C_2\right]. \qquad \left(\frac{C}{2} \text{ обозначено чрезъ } C_0\right).$$

Линейныя уравненія съ послѣднимъ членомъ.

563. Линейное уравненіе съ послѣднимъ членомъ имѣетъ видъ:

$$(a)\qquad y^{(n)}+X_1 y^{(n-1)}+X_2 y^{(n-2)}+\ldots+X_{n-2}y''+X_{n-1}y'+X_n y=X_0,$$

гдѣ $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n$ функціи x или постоянныя числа.

Пусть:

$$(b)\qquad y=C_1 y_1+C_2 y_2+C_3 y_3+\ldots+C_n y_n$$

полный интегралъ линейнаго уравненія того же порядка и съ тѣми же коэффиціентами, но безъ послѣдняго члена, т. е. полный интегралъ уравненія:

$$(c)\qquad y^{(n)}+X_1 y^{(n-1)}+X_2 y^{(n-2)}+\ldots+X_{n-2}y''+X_{n-1}y'+X_n y=0.$$

Замѣнимъ въ немъ количества $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ такими функціями, чтобы онъ обратился въ полный интегралъ уравненія (a). Такъ какъ этихъ количествъ счётомъ n, то мы можемъ подчинить ихъ $n-1$ произвольнымъ условіямъ, а n-ое условіе опредѣлить такъ, чтобы (b) удовлетворяло (a). Дифференцируя (b), считая $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ функціями x, получимъ:

$$y'=C_1 y_1'+C_2 y_2'+\ldots+C_n y_n'+C_1' y_1+C_2' y_2+\ldots+C_n' y_n.$$

Подчинимъ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ условію:

$$(1)\qquad C_1' y_1+C_2' y_2+\ldots+C_n' y_n=0;$$

тогда:

$$y'=C_1 y_1'+C_2 y_2'+\ldots+C_n y_n'.$$

Дифференцируя послѣднее уравненіе, и подчиняя при этомъ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ еще условію:

$$(2)\qquad C_1' y_1'+C_2' y_2'+\ldots+C_n' y_n'=0,$$

получимъ:

$$y''=C_1 y_1''+C_2 y_2''+\ldots+C_n y_n''.$$

Дифференцируя далѣе, полагая послѣ каждаго дифференцированія послѣдовательно:

$$(3) \qquad C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + \ldots + C_n' y_n'' = 0$$

. . . .

. . . .

$$(n-1) \qquad C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0,$$

получимъ:

$$y''' = C_1 y_1''' + C_2 y_2''' + \ldots + C_n y_n'''$$

. . . .

. . . .

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}$$

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots$$

$$\ldots + C_n' y_n^{(n-1)}.$$

Если-бы, при условіяхъ: (1), (2), . . . , $(n-1)$, и сумма $C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)}$ равнялась 0, — количества $C_1, C_2, \ldots, C_n$ были-бы постоянными, — и тогда (b) удовлетворяло-бы уравненію (c), но не (a). Стало-быть послѣдняя сумма, при принятыхъ $n-1$ условіяхъ, разнится отъ 0. Чтобы составить n-ое условіе, при которомъ, вмѣстѣ съ принятыми, (b) удовлетворяло-бы уравненію (a), подставимъ найденныя при условіяхъ (1), (2), . . . $(n-1)$ выраженія: $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ и $y^{(n)}$ въ уравненіе (a); получимъ:

$$C_1 \left[y_1^{(n)} + X_1 y_1^{(n-1)} + X_2 y_1^{(n-2)} + \ldots + X_{n-2} y_1'' + X_{n-1} y_1' + X_n y_1 \right] +$$

$$+ C_2 \left[y_2^{(n)} + X_1 y_2^{(n-1)} + X_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + X_{n-2} y_2'' + X_{n-1} y_2' + X_n y_2 \right] +$$

. . . .

. . . .

$$+ C_n \left[y_n^{(n)} + X_1 y_n^{(n-1)} + X_2 y_n^{(n-2)} + \ldots + X_{n-2} y_n'' + X_{n-1} y_n' + X_n y_n \right] +$$

$$+ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = X_0.$$

Функціи $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — частные интегралы уравненія (c); поэтому:

$$y_1^{(n)} + X_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y_1' + X_n y_1 = 0$$

$$y_2^{(n)} + X_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y_2' + X_n y_2 = 0$$

. . . .

. . . .

$$y_n^{(n)} + X_1 y_n^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y_n' + X_n y_n = 0.$$

Слѣдовательно n-ое условіе будетъ:

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = X_0.$$

И такъ (b) удовлетворитъ уравненію (a), если функціи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ удовлетворяютъ слѣдующимъ n уравненіямъ:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0,$$

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0,$$

(d) $$C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + \ldots + C_n' y_n'' = 0,$$

. . . .

. . . .

$$C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0,$$

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = X_0.$$

Эти уравненія — первой степени относительно производныхъ: $C_1', C_2', \ldots, C_n'$. Пусть онѣ даютъ:

$$C_1' = \varphi_1(x),\ \ C_2' = \varphi_2(x), \ldots, \ C_n' = \varphi_n(x);$$

тогда:

$$C_1 = \int \varphi_1(x)\,dx,\ \ C_2 = \int \varphi_2(x)\,dx, \ldots, \ C_n = \int \varphi_n(x)\,dx.$$

Если послѣдніе интегралы равны суммамъ:

$$\xi_1(x) + c_1,\ \ \xi_2(x) + c_2, \ldots, \ \xi_n(x) + c_n, \quad \left(\begin{array}{c} c_1, c_2, \ldots, c_n \\ \text{пост. произвольн.} \end{array}\right)$$

то полный интегралъ уравненія (*a*) будетъ:

$$y = [\xi_1(x) + c_1]\, y_1 + [\xi_2(x) + c_2]\, y_2 + \ldots + [\xi_n(x) + c_n]\, y_n,$$

или:

$$(e) \qquad y = \Theta(x) + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

гдѣ: $\qquad \Theta(x) = y_1 \xi_1(x) + y_2 \xi_2(x) + \ldots + y_n \xi_n(x).$

И такъ: чтобы получить полный интегралъ уравненія (*a*), откинемъ въ немъ послѣдній членъ и проинтегрируемъ полученное уравненіе (*c*); затѣмъ примемъ найденный результатъ (*b*) за интегралъ уравненія (*a*), а для опредѣленія функцій: $C_1, C_2, \ldots, C_n$ продифференцируемъ его n разъ, приравнивая при этомъ сумму членовъ, содержащихъ $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, нулю послѣ каждаго изъ первыхъ $n - 1$ дифференцированій и функціи X_0 послѣ n-го дифференцированія. Такимъ образомъ составится система уравненій (*d*), которая и приведетъ къ $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Проще систему (*d*) можно составить такъ: продифференцировать (*b*) n разъ, считая постоянными, при первомъ дифференцированіи явно входящій x, а при остальныхъ: $C_1', C_2', \ldots, C_n'$; потомъ первые $n - 1$ результатовъ приравнять 0, а послѣдній — функціи X_0.

Примѣры:

a) $\qquad y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x;$

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x};$$

$$\left.\begin{aligned} &(C_1' + C_2' x)\, e^{-x} = 0 \\ &(C_2' - C_1' - C_2' x)\, e^{-x} = x^2 e^{-x} \cos x \end{aligned}\right| \begin{aligned} &C_1' + C_2' x = 0 \\ &-C_1' + C_2' - C_2' x = x^2 \cos x, \end{aligned}$$

$$C_2' = x^2 \cos x, \quad C_1' = -x^3 \cos x;$$

$$C_1 = -\int x^3 \cos x\, dx = -(x^3 - 6x) \sin x - (3x^2 - 6) \cos x + c_1,$$

$$C_2 = \int x^2 \cos x\, dx = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + c_2;$$

$$y = [c_1 + c_2 x + 4x \sin x - (x^2 - 6) \cos x]\, e^{-x}.$$

b) $\qquad y'' + y = \cos x;$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

$$\left.\begin{aligned} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ - C_1' \sin x + C_2' \cos x = \cos x \end{aligned}\right\} \begin{aligned} C_1' = - \cos x \sin x \\ C_2' = \cos^2 x; \end{aligned}$$

$$C_1 = - \int \cos x \sin x \, dx = \frac{\cos^2 x}{2} + c_1,$$

$$C_2 = \int \cos^2 x \, dx = \frac{x + \cos x \sin x}{2} + c_2,$$

$$y = \frac{\cos x + x \sin x}{2} + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Членъ $\frac{\cos x}{2}$ можно включить въ $c_1 \cos x$; и потому:

$$y = \frac{x \sin x}{2} + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

c) $$y''' - 2y'' - y' + 2y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + 1;$$

$$y = \frac{2x^4 + 22x^2 + 6x + 49}{4} + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

d) $$(x + 1)^2 y'' + (x + 1) y' - y = 2x^3;$$

$$y = C_1 (x + 1) + C_2 (x + 1)^{-1};$$

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x+1) + C_2'(x+1)^{-1} = 0 \\ C_1' - C_2'(x + 1)^{-2} = 2x^2(x+1)^{-2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} C_1' = \frac{x^2}{(x+1)^2}, \\ C_2' = - x^2; \end{aligned}$$

$$C_1 = \int \frac{x^2 \, dx}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{x + 1} - 2l(x + 1) + c_1,$$

$$C_2 = - \int x^2 \, dx = - \frac{x^3}{3} + c_2,$$

$$y = c_1(x+1) + c_2(x+1)^{-1} + x^2 + 2x - 2(x+1) l(x+1) - \frac{x^3}{3}(x+1)^{-1}$$

$$= c_1(x+1) + \frac{c_2}{x+1} + \frac{2x^2 + 7x - 1}{3} + \frac{1}{3(x+1)} - 2(x+1) l (x+1).$$

Откидывая членъ $\frac{1}{3(x+1)}$, какъ заключающійся въ $\frac{c_2}{x+1}$ получимъ:

$$y = c_1(x+1) + \frac{c_2}{x+1} + \frac{2x^2+7x-1}{3} - 2(x+1)\,l\,(x+1).$$

Можно еще прибавить членъ $\frac{x+1}{3}$, какъ заключающійся въ $c_1(x+1)$; тогда:

$$y = c_1(x+1) + \frac{c_2}{x+1} + \frac{2x^2+8x}{3} - 2(x+1)\,l\,(x+1).$$

564. Уравненіе (e) показываетъ, что полный интегралъ линейнаго уравненія съ послѣднимъ членомъ (уравненія (a)) можно получить изъ полнаго интеграла уравненія безъ послѣдняго члена (уравненія (c)) чрезъ прибавленіе къ нему функціи $\Theta(x)$, т. е. одного изъ частныхъ интеграловъ уравненія (a). Впрочемъ и независимо отъ (e) можно подтвердить это слѣдующимъ разсужденіемъ. Пусть одинъ изъ частныхъ интеграловъ уравненія (a) есть: $y = \psi(x)$, а полный: $y = \psi(x) + z$. Подставляя тотъ и другой въ уравненіе (a), получимъ:

$$(\alpha) \qquad \psi^{(n)}(x) + X_1\psi^{(n-1)}(x) + \ldots + X_{n-1}\psi'(x) + X_n\psi(x) = X_0,$$

$$(\beta) \qquad \psi^{(n)}(x) + z^{(n)} + X_1\left[\psi^{(n-1)}(x) + z^{(n-1)}\right] + \ldots$$

$$\ldots + X_{n-1}\left[\psi'(x) + z'\right] + X_n\left[\psi(x) + z\right] = X_0.$$

Вычитаніе (α) изъ (β) приведетъ къ уравненію:

$$z^{(n)} + X_1 z^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1}z' + X_n z = 0,$$

— линейному, съ тѣми же коэффиціентами, какъ и въ уравненіи (a), но безъ послѣдняго члена.

И такъ: если одинъ изъ частныхъ интеграловъ уравненія (a) есть:

$$y = \psi(x),$$

а полный интегралъ уравненія (c) есть:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

то полный интегралъ уравненія (a) будетъ:

$$y = \psi(x) + C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \quad *).$$

*) Какой изъ частныхъ интеграловъ поставить на мѣстѣ функціи $\psi(x)$, —

Частныя рѣшенія во многихъ случаяхъ находятся легко по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; напримѣръ въ случаяхъ, когда коэффиціенты уравненія постоянные, а послѣдній членъ есть или цѣлая функція x, или показательная вида $ca^{\alpha x}$, или тригонометрическая вида: $a\cos \alpha x + b\sin \beta x$, и проч.

Примѣры:

a) $$y''' + y' = x^2 - 3x - 2;$$

$$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \qquad y'' = 6\alpha x + 2\beta$$

$$y' = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \qquad \Big| \quad y''' = 6\alpha,$$

$$y''' + y' = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma + 6\alpha = x^2 - 3x - 2;$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha = 1 \\ 2\beta = -3 \\ \gamma + 6\alpha = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{3}{2} \quad \left(\begin{array}{c}\delta \text{ остается} \\ \text{произвольнымъ}\end{array}\right); \\ \gamma = -4 \end{array}$$

$$y = \frac{2x^3 - 9x^2 - 24x}{6} + \delta \quad \text{(частный интегралъ)},$$

$$y = \frac{2x^3 - 9x^2 - 24x}{6} + C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x \quad \text{(полный интегралъ)}.$$

b) $$y'' - 4y' + 3y = 2\sin 3x;$$

$$y = \alpha \sin 3x + \beta \cos 3x,$$

$$y' = 3\alpha \cos 3x - 3\beta \sin 3x, \quad y'' = -9\alpha \sin 3x - 9\beta \cos 3x,$$

$$y'' - 4y' + 3y = (12\beta - 6\alpha)\sin 3x - (6\beta + 12\alpha)\cos 3x = 2\sin 3x$$

$$\begin{array}{l|l} 12\beta - 6\alpha = 2 & 6\beta - 3\alpha = 1 \\ 6\beta + 12\alpha = 0 & \beta + 2\alpha = 0 \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{15}, \\ \beta = \frac{2}{15}; \end{array}$$

это безразлично, — потому что разности между частными интегралами могутъ быть включены въ члены суммы $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

$$y = \frac{2\cos 3x - \sin 3x}{15} \quad \text{(частный интегралъ)},$$

$$y = \frac{2\cos 3x - \sin 3x}{15} + C_1 e^x + C_2 e^{3x} \quad \text{(полный интегралъ)}.$$

c) $$y''' + 2y'' - y' - 2y = x + e^{-3x};$$

$$y = \alpha x + \beta + \gamma e^{-3x} \quad \Big| \quad y'' = 9\gamma e^{-3x}$$

$$y' = \alpha - 3\gamma e^{-3x} \quad \Big| \quad y''' = -27\gamma e^{-3x},$$

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = -2\alpha x - 2\beta - \alpha - 8\gamma e^{-3x} = x + e^{-3x};$$

$$\left.\begin{array}{r} -2\alpha = 1 \\ 2\beta + \alpha = 0 \\ -8\gamma = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{2}, \\ \beta = \frac{1}{4}, \\ \gamma = -\frac{1}{8}; \end{array}$$

$$y = -\frac{2x-1}{4} - \frac{e^{-3x}}{8} \quad \text{(частный интегралъ)},$$

$$y = -\frac{2x-1}{4} - \frac{e^{-3x}}{8} + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} \quad \text{(полный интегралъ)}.$$

d) $$y''' - y = x^2 + e^{-2x} - \cos x;$$

$$y = -x^2 - \frac{e^{-2x}}{9} + \frac{\cos x + \sin x}{2} + C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

(полный интегралъ).

e) $$y'' + y = \cos x \quad \text{(примѣръ } b \text{ n}^\circ \text{ 563)}.$$

Функція $\alpha \sin x + \beta \cos x$ не удовлетворитъ уравненію, каковы-бы ни-были коэффиціенты α и β, — потому что она заключается, какъ частный случай, въ полномъ интегралѣ уравненія: $y'' + y = 0$; по этому, каковы-бы ни были α и β, она обратитъ сумму $y'' + y$ въ 0, а не въ $\cos x$. Чтобы найти однакоже частный интегралъ даннаго уравненія, не испытывая функцій другой формы, ему удовлетворяющихъ, мы вмѣсто даннаго уравненія возьмемъ уравненіе нѣсколько общнѣе, а именно:

$$(e') \qquad y'' + y = \cos ax,$$

и станемъ искать интегралъ послѣдняго; а затѣмъ подведеніемъ a къ 1-цѣ перейдемъ и къ интегралу даннаго уравненія.

$$y = \alpha \cos ax + \beta \sin ax,$$

$$y' = -a\alpha \sin ax + a\beta \cos ax,\quad y'' = -a^2 \alpha \cos ax - a^2 \beta \sin ax,$$

$$y'' + y = (1 - a^2)\,\alpha \cos ax + (1 - a^2)\,\beta \sin ax = \cos ax;$$

$$\left.\begin{aligned}(1-a^2)\,\alpha &= 1\\ (1-a^2)\,\beta &= 0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{1-a^2},\\ \beta &= 0.\end{aligned}$$

Полный интегралъ уравненія (e'):

$$y = \frac{\cos ax}{1-a^2} + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Его можно представить и подъ видомъ:

$$y = \frac{\cos ax \quad \cos x}{1-a^2} + C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

(прибавленный членъ $-\frac{\cos x}{1-a^2}$ заключается въ $C_1 \cos x$).

Теперь, подводя a къ 1 и переходя къ предѣлу, получимъ: пред. $\frac{\cos ax - \cos x}{1-a^2} = \left(\frac{x \sin ax}{2a}\right)_{a=1} = \frac{x \sin x}{2}$; по этому полный интегралъ уравненія $y'' + y = \cos x$ будетъ:

$$y = \frac{x \sin x}{2} + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

f) $$y'' + 5y' + 6y = 3e^{-2x}.$$

Функція αe^{-2x}, будучи подставлена въ трехчленъ $y'' + 5y' + 6y$ на мѣсто y, обратитъ его въ 0 при всякомъ α (пост.), и стало-быть не можетъ служить данному уравненію частнымъ интеграломъ, а будетъ интеграломъ уравненія: $y'' + 5y' + 6y = 0$. Вмѣсто даннаго возьмемъ уравненіе:

$$(f')\qquad y'' + 5y' + 6y = 3e^{ax},$$

найдемъ его интегралъ, и затѣмъ подведеніемъ a къ -2 перейдемъ и къ интегралу даннаго уравненія.

$$y = \alpha e^{ax},\ y' = a\alpha e^{ax},\ y'' = a^2\alpha e^{ax};$$

$$y'' + 5y' + 6y = (a^2 + 5a + 6)\,\alpha e^{ax} = 3e^{ax},$$

$$(a^2 + 5a + 6)\,\alpha = 3,\ \alpha = \frac{3}{a^2 + 5a + 6};$$

$$y = \frac{3e^{ax}}{a^2 + 5a + 6} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Это — полный интегралъ уравненія (f'); его можно представить и такъ:

$$y = \frac{3\,(e^{ax} - e^{-2x})}{a^2 + 5a + 6} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x};$$

(прибавленный членъ $\frac{-3e^{-2x}}{a^2 + 5a + 6}$ заключается въ $C_1 e^{-2x}$).

Подводя a въ -2, получимъ:

$$\text{пред.}\ \frac{e^{ax} - e^{-2x}}{a^2 + 5a + 6} = \left(\frac{xe^{ax}}{2a + 5}\right)_{a=-2} = xe^{-2x};$$

по этому полный интегралъ даннаго уравненія будетъ:

$$y = 3xe^{-2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

СОВОКУПНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

565. Пусть въ совокупности n дифференціальныхъ уравненій:

$$f_1(x, u_1, u_1', u_1'', \ldots, u_2, u_2', u_2'', \ldots, u_n, u_n', u_n'', \ldots) = 0$$

$$f_2(x, u_1, u_1', u_1'', \ldots, u_2, u_2', u_2'', \ldots, u_n, u_n', u_n'', \ldots) = 0$$

. . . .

. . . .

$$f_n(x, u_1, u_1', u_1'', \ldots, u_2, u_2', u_2'', \ldots, u_n, u_n', u_n'', \ldots) = 0$$

x — перемѣнная независимая, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — функціи этой перемѣнной, $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ — первыя ихъ производныя по x, $u_1'', u_2'', \ldots, u_n''$

—вторыя производныя, и т. д. Проинтегрировать эти уравненія значитъ найти функціи $u_1, u_2, \ldots, u_n$, имъ удовлетворяющія, другими словами—найти n удовлетворяющихъ имъ уравненій, связывающихъ $x, u_1, u_2, \ldots, u_n$, и несодержащихъ производныхъ $u_1', u_1'', \ldots, u_2', u_2'', \ldots, u_n', u_n'', \ldots$

Если искомыхъ функцій двѣ: y и z, то и уравненій два; они вида:

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}, z, z', z'', \ldots, z^{(k)}) = 0 \\ \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l)}) = 0 \end{array} \right\}$$

Эти уравненія всегда можно представить такъ, чтобы высшая производная y была въ одномъ изъ нихъ, а высшая производная z — въ другомъ.

Допустимъ сначала, что обѣ высшія производныя находятся въ одномъ уравненіи, напр. въ первомъ ($m > n$, $k > l$); тогда, выражая изъ втораго $z^{(l)}$ въ зависимости отъ $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)}$, и дифференцируя потомъ полученное $k - l$ разъ, замѣняя послѣ каждаго дифференцированія производную $z^{(l)}$ равнымъ ей выраженіемъ, получимъ такого вида уравненія:

$$z^{(l)} = \psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)})$$

$$z^{(l+1)} = \psi_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n+1)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)})$$

$$z^{(l+2)} = \psi_2(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n+2)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z^{(k)} = \psi_{k-l}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n+k-l)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)}).$$

Подставляя эти производныя въ первое изъ уравненій (a), мы приведемъ его къ виду:

$$\xi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)}) = 0,$$

гдѣ: $p = m$ при $m \geqq n + k - l$, $p = n + k - l$ при $m < n + k - l$.

Слѣдовательно (a) можно замѣнить совокупностью:

$$\left\{\begin{array}{l}\xi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)}) = 0 \\ \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l)}) = 0\end{array}\right\},$$

въ которой высшая производная y — въ первомъ уравненіи, а высшая производная z — во второмъ.

Сумма указателей порядковъ этихъ производныхъ равна бо́льшей изъ двухъ суммъ $m + l$ и $n + k$, если эти суммы различны, и одной изъ нихъ, если онѣ одинаковы:

$p + l = m + l$, когда $m \geqq n + k - l$, или $m + l \geqq n + k$;

$p + l = n + k - l + l = n + k$, когда $m < n + k - l$, или $m + l < n + k$.

Пусть теперь: $m > n$, а $k = l$; тогда, выражая $z^{(l)}$ изъ втораго уравненія совокупности (a) и подставляя въ первое, мы замѣнили-бы (a) совокупностью:

$$\left\{\begin{array}{l}f_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)}) = 0 \\ \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l)}) = 0\end{array}\right\};$$

тогда высшая производная y будетъ въ первомъ уравненіи, а высшая производная z — во второмъ, и сумма указателей порядковъ этихъ производныхъ равна $m + l$, — бо́льшей изъ суммъ: $m + l$ и $n + k$.

Наконецъ, если $m = n$ и $k = l$, то, выражая $z^{(l)}$ изъ втораго уравненія совокупности (a) и подставляя въ первое, а также $y^{(m)}$ изъ перваго и подставляя во второе, мы приведемъ (a) къ системѣ уравненій вида:

$$\left\{\begin{array}{l}f_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)}) = 0 \\ \varphi_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l)}) = 0\end{array}\right\},$$

гдѣ высшая производная y — въ первомъ уравненіи, а высшая производная z — во второмъ, и сумма указателей порядковъ ихъ равна $m + l$.

Систему

$$\left\{\begin{array}{c}f(x, y, y', y'', y''', z, z', z'', z''', z^{(4)}) = 0 \\ \varphi(x, y, y', y'', z, z', z'') = 0\end{array}\right\}$$

подобными преобразованіями мы привели-бы къ системѣ:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_1(x,y,y',y'',y''',y^{(4)}, z,z')=0 \\ \varphi(x,y,y',y'', z,z',z'')=0 \end{array} \right\},$$

или къ системѣ:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{11}(x,y,y', z,z',z'',z''',z^{(4)})=0 \\ \varphi(x,y,y',y'', z,z',z'')=0 \end{array} \right\}.$$

Въ той и другой высшія производныя y и z въ разныхъ уравненіяхъ, а сумма указателей ихъ порядковъ есть 6, — бо́льшая изъ двухъ суммъ: $3+2$ и $2+4$.

566. Предполагая въ совокупности уравненій (a) $m>n$ и $l>k$, выразимъ изъ перваго $y^{(m)}$, а изъ втораго $z^{(l)}$, и будемъ результаты дифференцировать, замѣняя всякій разъ $y^{(m)}$ и $z^{(l)}$ найденными равными имъ выраженіями; получимъ уравненія вида:

$$y^{(m)}=\psi(x,y,y',y'',\ldots,y^{(m-1)},z,z',z'',\ldots,z^{(l-1)})$$

$$z^{(l)}=\xi(x,y,y',y'',\ldots,y^{(m-1)},z,z',z'',\ldots,z^{(l-1)})$$

$$y^{(m+1)}=\psi_1(x,y,y',y'',\ldots,y^{(m-1)},z,z',z'',\ldots,z^{(l-1)})$$

$$z^{(l+1)}=\xi_1(x,y,y',y'',\ldots,y^{(m-1)},z,z',z'',\ldots,z^{(l-1)})$$

$$y^{(m+2)}=\psi_2(x,y,y',y'',\ldots,y^{(m-1)},z,z',z'',\ldots,z^{(l-1)})$$

$$z^{(l+2)}=\xi_2(x,y,y',y'',\ldots,y^{(m-1)},z,z',z'',\ldots,z^{(l-1)})$$

и т. д.

Предполагая функціи $y, y', y'', \ldots, z, z' z'', \ldots$ сплошными около $x=x_0$, обозначимъ значенія ихъ при $x=x_0$ чрезъ $y_0, y_0', y_0'', \ldots, z_0, z_0', z_0'', \ldots$, и развернемъ y и z въ строки по степенямъ $x-x_0$:

$$y=y_0+(x-x_0)y_0'+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}y_0''+\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}y_0'''+\ldots.$$

$$z=z_0+(x-x_0)z_0'+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}z_0''+\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}z_0'''+\ldots.$$

Употребляя теперь разсужденія, подобныя приведеннымъ въ n⁰ 516, мы увидимъ, что функціи:

$$y = y_0 + (x-x_0)\,y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\,y_0'' + \ldots + \frac{(x-x_0)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\,y_0^{(m-1)} +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^m}{1.2\ldots m}\,p_0 + \frac{(x-x_0)^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}\,p_1 + \frac{(x-x_0)^{m+2}}{1.2\ldots(m+2)}\,p_2 + \ldots$$

$$z = z_0 + (x-x_0)\,z_0' + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\,z_0'' + \ldots + \frac{(x-x_0)^{l-1}}{1.2\ldots(l-1)}\,z_0^{(l-1)} +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^l}{1.2\ldots l}\,q_0 + \frac{(x-x_0)^{l+1}}{1.2\ldots(l+1)}\,q_1 + \frac{(x-x_0)^{l+2}}{1.2\ldots(l+2)}\,q_2 + \ldots,$$

въ которыхъ:

$$p_0 = \psi(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(m-1)}, z_0, z_0', z_0'', \ldots, z_0^{(l-1)})$$

$$q_0 = \xi(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(m-1)}, z_0, z_0', z_0'', \ldots, z_0^{(l-1)})$$

$$p_1 = \psi_1(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(m-1)}, z_0, z_0', z_0'', \ldots, z_0^{(l-1)})$$

$$q_1 = \xi_1(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(m-1)}, z_0, z_0', z_0'', \ldots, z_0^{(l-1)})$$

$$p_2 = \psi_2(x_0, y_0, y_0', y_0'' \ldots, y_0^{(m-1)}, z_0, z_0', z_0'', \ldots, z_0^{(l-1)})$$

$$q_2 = \xi_2(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(m-1)}, z_0, z_0', z_0'', \ldots, z_0^{(l-1)})$$

и т. д.,

а $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(m-1)}, z_0, z_0', z_0'', \ldots, z_0^{(l-1)}$ — числа постоянныя, но произвольныя, — удовлетворятъ уравненіямъ (a); стало-быть онѣ служатъ интегралами уравненіямъ (a). Интеграловъ этихъ безчисленное множество, — потому что постояннымъ произвольнымъ, которыхъ счётомъ $m+l$, можно приписывать какія угодно значенія. Болѣе $m+l$ постоянныхъ произвольныхъ не можетъ быть въ интегралахъ, и всѣ формы интеграловъ съ $m+l$ постоянными произвольными приводятся къ однѣмъ и тѣмъ же.

Вообще интегралы системы (a) выражаются удовлетворяющими этой системѣ двумя уравненіями вида:

$$F(x, y, z, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{m+l}) = 0$$

$$F_1(x, y, z, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{m+l}) = 0,$$

въ которыхъ $C_1, C_2, \ldots, C_{m+l}$ — постоянныя произвольныя. Ихъ называютъ *полными*, если постоянными произвольными можно распорядиться такъ, чтобы при $x = x_0$ значенія $y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$, $z, z', z'', \ldots, z^{(l-1)}$ были произвольными. При опредѣленныхъ значеніяхъ $C_1, C_2, \ldots, C_{m+l}$, интегралы называютъ *частными*. Есть системы, имѣющія и *особенные* интегралы, не заключающіеся въ полныхъ, какъ частные случаи.

567. Одну изъ неизвѣстныхъ функцій съ ея производными въ системѣ уравненій:

$$\begin{aligned}(1)\quad & f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}, z, z', z'', \ldots, z^{(k)}) = 0 \\ (2)\quad & \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l)}) = 0\end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} m > n \\ l > k \end{pmatrix}$$

можно исключить, и привести такимъ образомъ интегрированіе системы въ интегрированію одного уравненія, содержащаго перемѣнную независимую и одну изъ искомыхъ функцій съ ея производными. Для этого продифференцируемъ (1) l разъ, а (2) k разъ; получимъ $k + l$ уравненій вида:

$$f_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m+1)}, z, z', z'', \ldots, z^{(k+1)}) = 0$$

$$f_2(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m+2)}, z, z', z'', \ldots, z^{(k+2)}) = 0$$

. . . .

. . . .

$$f_l(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m+l)}, z, z', z'', \ldots, z^{(k+l)}) = 0$$

$$\varphi_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n+1)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l+1)}) = 0$$

$$\varphi_2(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n+2)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l+2)}) = 0$$

. . . .

. . . .

$$\varphi_k(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n+k)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l+k)}) = 0,$$

въ которыхъ высшая производная y порядка $m+l$, а высшая производная z порядка $k+l$. Исключимъ изъ этихъ уравненій и уравненій

(1) и (2) (всего, стало-быть, изъ $k+l+2$ уравненій) $k+l+1$ количествъ: $z, z', z'', \ldots, z^{(k+l)}$; тогда получимъ уравненіе вида:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m+l)}) = 0,$$

не содержащее ни z, ни производныхъ z. Уравненіе это порядка $m+l$; пусть полный интегралъ его:

$$(3) \qquad \psi(x, y, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{m+l}) = 0.$$

Теперь чтобы получить другую функцію, а именно z, беремъ $k+l$ уравненій:

$$f = 0, \ f_1 = 0, \ f_2 = 0, \ldots, \ f_{l-1} = 0,$$

$$\varphi = 0, \ \varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ldots, \ \varphi_{k-1} = 0.$$

Въ нихъ высшія производныя: $y^{(m+l-1)}$ и $z^{(k+l-1)}$. Выключимъ изъ нихъ $k+l-1$ производныхъ: $z', z'', \ldots, z^{(k+l-1)}$; получимъ уравненіе вида:

$$\xi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m+l-1)}, z) = 0.$$

Присоединяя къ нему уравненіе (3) и $m+l-1$ уравненій, получаемыхъ послѣдовательнымъ дифференцированіемъ (3), будемъ имѣть всего $m+l+1$ уравненій:

$$\xi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m+l-1)}, z) = 0$$

$$\psi(x, y, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{m+l}) = 0$$

$$\psi_1(x, y, y', C_1, C_2, \ldots, C_{m+l}) = 0$$

$$\psi_2(x, y, y', y'', C_1, C_2, \ldots, C_{m+l}) = 0$$

. . . .

. . . .

$$\psi_{m+l-1}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m+l-1)}, C_1, C_2, \ldots, C_{m+l}) = 0.$$

Выключая изъ нихъ $m+l$ функцій: $y, y', y'', \ldots, y^{(m+l-1)}$, получимъ уравненіе вида:

$$(4) \qquad \theta(x, z, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{m+l}) = 0,$$

которое будетъ другимъ интеграломъ совокупности уравненій (1) и (2). Такимъ образомъ полные интегралы уравненій (1) и (2) будутъ (3) и (4). Изъ нихъ (3) ищется дифференцированіемъ, исключеніемъ и интегрированіемъ, а (4) только дифференцированіемъ и исключеніемъ.

568. **Систему дифференціальныхъ уравненій перваго порядка** въ общемъ видѣ можно представить совокупностью слѣдующихъ n уравненій:

$$f_1(x, u_1, u_1', u_2, u_2', \ldots, u_n, u_n') = 0$$

$$f_2(x, u_1, u_1', u_2, u_2', \ldots, u_n, u_n') = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x, u_1, u_1', u_2, u_2', \ldots, u_n, u_n') = 0.$$

Если разрѣшить эти уравненія относительно производныхъ: $u_1', u_2', \ldots, u_n'$, и затѣмъ выраженія производныхъ привесть къ общему знаменателю, то они примутъ видъ:

$$u_1' = \frac{U_1}{X},\ u_2' = \frac{U_2}{X},\ u_3' = \frac{U_3}{X}, \ldots\ldots, u_n' = \frac{U_n}{X},$$

или:

$$\frac{dx}{X} = \frac{du_1}{U_1} = \frac{du_2}{U_2} = \frac{du_3}{U_3} = \ldots\ldots = \frac{du_n}{U_n},$$

гдѣ $X, U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ функціи $x, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$.

$$X = \varphi(x, u_1, u_2, \ldots, u_n),\ U_1 = \xi_1(x, u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

$$U_2 = \xi_2(x, u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, U_n = \xi_n(x, u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Такъ для двухъ уравненій перваго порядка съ двумя функціями y и z имѣли-бы:

$$\left\{\begin{matrix} f_1(x, y, y', z, z') = 0 \\ f_2(x, y, y', z, z') = 0 \end{matrix}\right\} \text{ или: } \left\{\begin{matrix} F_1(x, y, y', z) = 0 \\ F_2(x, y, z, z') = 0 \end{matrix}\right\},$$

а по разрѣшеніи относительно y' и z':

$$y' = \frac{Y}{X},\ z' = \frac{Z}{X}, \text{ или: } \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

гдѣ X, Y и Z — функціи x, y и z

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \xi(x, y, z), \quad Z = \psi(x, y, z).$$

569. Система совокупныхъ уравненій высшаго порядка приводится къ системѣ уравненій перваго порядка. Обозначая въ системѣ:

$$\begin{cases} f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}, z, z', z'', \ldots, z^{(k)}) = 0 \\ \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, z, z', z'', \ldots, z^{(l)}) = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} m > n \\ l > k \end{pmatrix}$$

производныя $y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$ соотвѣтственно чрезъ $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$, а производныя $z', z'', \ldots, z^{(l-1)}$ чрезъ $v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}$, мы приведемъ ее къ слѣдующей системѣ $m+l$ уравненій перваго порядка:

$$f(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u'_{m-1}, z, v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0,$$

$$\varphi(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_n, z, v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}, v'_{l-1}) = 0,$$

$$y' = u_1, \; u_1' = u_2, \; u_2' = u_3, \ldots, u'_{m-2} = u_{m-1},$$

$$z' = v_1, \; v_1' = v_2, \; v_2' = v_3, \ldots, v'_{l-2} = v_{l-1}.$$

Если изъ этихъ уравненій первое и второе даютъ: $u'_{m-1} = U$, $v'_{l-1} = V$ (U и V — функціи $x, y, z, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}$), то послѣднюю систему можно представить подъ видомъ:

$$dx = \frac{dy}{u_1} = \frac{du_1}{u_2} = \frac{du_2}{u_3} = \ldots = \frac{du_{m-2}}{u_{m-1}} = \frac{du_{m-1}}{U} =$$

$$= \frac{dz}{v_1} = \frac{dv_1}{v_2} = \frac{dv_2}{v_3} = \ldots = \frac{dv_{l-2}}{v_{l-1}} = \frac{dv_{l-1}}{V}.$$

Линейныя уравненія перваго порядка.

570. Совокупнымъ уравненіямъ перваго порядка съ двумя искомыми функціями y и z, линейнымъ относительно этихъ функцій и ихъ производныхъ, можно дать видъ:

$$(1) \qquad \begin{cases} y' + Py + Qz = X \\ z' + P_1 y + Q_1 z = X_1 \end{cases},$$

гдѣ P, Q, X, P_1, Q_1 и X_1 — данныя функціи x. Чтобы проинтегриро-

вать ихъ, введемъ во второе уравненіе произвольный множитель m, и произведеніе сложимъ съ первымъ; получимъ:

$$y' + mz' + (P + mP_1)\, y + (Q + mQ_1)\, z = X + mX_1.$$

Положимъ теперь:

$$(2) \qquad y + mz = u,$$

откуда: $y' + mz' = u' - m'z$; тогда:

$$u' - m'z + (P + mP_1)(u - mz) + (Q + mQ_1)\, z = X + mX_1,$$

или:

$$u' - [m' + P_1 m^2 + (P - Q_1)\, m - Q]\, z + (P + mP_1)\, u = X + mX_1.$$

Подчинимъ множитель m условію:

$$(3) \qquad m' + P_1 m^2 + (P - Q_1)\, m - Q = 0;$$

тогда послѣднее уравненіе обратится въ слѣдующее:

$$(4) \qquad u' + (P + mP_1)\, u = X + mX_1,$$

— линейное относительно u и u'; а множитель m найдется изъ уравненія (3), линейнаго относительно m', но нелинейнаго относительно m.

Нѣтъ надобности искать полный интегралъ уравненія (3); достаточно найти два частныхъ интеграла его. Пусть частные интегралы: $m = m_1$ и $m = m_{11}$; а отвѣчающія имъ функціи u пусть: u_1 и u_{11}. Эти функціи найдемъ, интегрируя линейныя уравненія:

$$u_1' + (P + m_1 P_1)\, u_1 = X + m_1 X_1,$$

$$u_{11}' + (P + m_{11} P_1)\, u_{11} = X + m_{11} X_1;$$

а полные интегралы системы (1) будутъ:

$$y + m_1 z = u_1, \quad y + m_{11} z = u_{11}.$$

Въ u_1 и u_{11} входятъ постоянныя произвольныя.

Если коэффиціенты P, Q, P_1 и Q_1 — постоянные, то множитель m можно взять также постояннымъ; тогда $m' = 0$, и уравненіе (3) приметъ видъ:

$$P_1 m^2 + (P - Q_1)\, m - Q = 0.$$

Изъ него, какъ уравненія второй степени, мы и получимъ два значенія m.

Въ случаѣ равенства корней этого уравненія, трехчленъ $P_1 m^2 + (P - Q_1) m - Q$ обращается въ произведеніе $P_1 (m - m_1)^2$, а уравненіе (3) въ слѣдующее:

$$m' + P_1 (m - m_1)^2 = 0, \text{ или: } \frac{dm}{(m-m_1)^2} + P_1\, dx = 0,$$

откуда:

$$-\frac{1}{m-m_1} + P_1 x + C = 0, \quad m = m_1 + \frac{1}{P_1 x + C}.$$

Въ такомъ случаѣ одно значеніе для m можно взять постояннымъ, а именно m_1, другое же: $m_1 + \frac{1}{P_1 x}$. Первому отвѣчаетъ $C = \infty$, второму: $C = 0$.

При постоянныхъ коэффиціентахъ, въ случаѣ равенства корней уравненія: $P_1 m^2 + (P - Q_1) m - Q = 0$, можно употребить еще слѣдующій пріемъ. Не замѣняя m никакимъ опредѣленнымъ числомъ, проинтегрируемъ уравненіе (4). Пусть интегралъ его, по замѣненіи въ немъ u суммою $y + mz$, есть:

$$\xi(m) = 0 \quad ^{*}).$$

Если-бы корни были разные, — одинъ m, другой $m + \Delta m$, то имѣли-бы:

$$\left\{ \begin{aligned} &\xi(m) = 0 \\ &\xi(m + \Delta m) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ или: } \left\{ \begin{aligned} &\xi(m) = 0 \\ &\frac{\xi(m+\Delta m) - \xi(m)}{\Delta m} = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Подводя Δm къ 0, и переходя къ предѣлу, получимъ:

$$\xi(m) = 0, \quad \xi'_m(m) = 0.$$

Эти уравненія и представятъ искомые интегралы, когда въ нихъ m замѣнимъ опредѣленнымъ числомъ m_1, — корнемъ уравненія: $P_1 m^2 + (P - Q_1) m - Q = 0$.

---

*) Мы не ставимъ на видъ другихъ перемѣнныхъ и постоянной произвольной, подразумѣвая ихъ въ знакѣ ξ.

При дифференцированіи по m уравненія $\xi(m)=0$, постоянную произвольную, входящую въ это уравненіе, слѣдуетъ считать произвольною функціею m; по этому производная постоянной произвольной будетъ другая постоянная произвольная.

Въ случаѣ, когда корни уравненія $P_1 m^2 + (P - Q_1)m - Q = 0$ мнимые, — избавиться отъ мнимости въ интегралахъ можно, употребляя извѣстное преобразованіе показательныхъ функцій въ тригонометрическія и вводя потомъ новыя постоянныя произвольныя.

Примѣры:

a)
$$\left\{\begin{array}{l} y' + 2y + 3z = x^2 + 1 \\ z' + y + 4z = 2x - 1 \end{array}\right\};$$

$$y' + mz' + (2+m)y + (3+4m)z = x^2 + 1 + m(2x - 1), \text{ (}m\text{ пост.)}$$

$$y + mz = u,\ y' + mz' = u',$$

$$u' - [(2+m)m - (3+4m)]z + (2+m)u = x^2 + 1 + m(2x-1);$$

$$m^2 - 2m - 3 = 0,\ m_1 = 3,\ m_{11} = -1;\ u_1 = y + 3z,\ u_{11} = y - z;$$

$$u' + (2+m)u = x^2 + 1 + m(2x - 1);$$

$$u_1' + 5u_1 = x^2 + 6x - 2,\ u'_{11} + u_{11} = x^2 - 2x + 2;$$

$$y + 3z = \frac{25x^2 + 140x - 78}{125} + C_1 e^{-5x},$$

$$y - z = x^2 - 4x + 6 + C_2 e^{-x};$$

$$y = \frac{100x^2 - 340x + 543}{125} + c_1 e^{-5x} + 3c_{11} e^{-x},$$

$$z = \frac{25x^2 - 160x + 207}{125} + c_1 e^{-5x} - c_{11} e^{-x}.$$

(мы обозначили $\frac{C_1}{4}$ чрезъ c_1, а $\frac{C_2}{4}$ чрезъ c_{11})

Другой пріемъ:

Исключимъ z и z' изъ двухъ данныхъ уравненій:

$$y' + 2y + 3z = x^2 + 1,\ z' + y + 4z = 2x - 1$$

и третьяго:

$$y'' + 2y' + 3z' = 2x,$$

— результата дифференцированія перваго; получимъ:

$$y'' + 6y' + 5y = 4x^2 - 4x + 7.$$

Послѣднее уравненіе — линейное съ постоянными коэффиціентами и съ послѣднимъ членомъ. Полный интегралъ его:

$$y = \frac{100x^2 - 340x + 543}{125} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x};$$

а изъ перваго даннаго уравненія: $3z = x^2 + 1 - 2y - y'$; по этому:

$$3z = x^2 + 1 - \frac{200x^2 - 680x + 1086}{125} - 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-5x} - \frac{200x - 340}{125} +$$
$$+ C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{-5x},$$

$$z = -\frac{25x^2 - 160x + 207}{125} - \frac{C_1}{3} e^{-x} + C_2 e^{-5x}.$$

Обозначая $\frac{C_1}{3}$ чрезъ C_1, получимъ:

$$y = \frac{100x^2 - 340x + 543}{125} + 3C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x},$$

$$z = -\frac{25x^2 - 160x + 207}{125} - C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}.$$

b)
$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y - z = x \\ z' + y + 3z = 1 \end{array} \right\};$$

$$y' + mz' + (1 + m)y - (1 - 3m)z = x + m,$$

$$y + mz = u, \quad y' + mz' = u' - m'z.$$

$$u' - z[m' + (m - 1)^2] + (1 + m)u = x + m;$$

$$m' + (m - 1)^2 = 0, \quad \frac{dm}{(m - 1)^2} + dx = 0, \quad m = 1 + \frac{1}{x + C};$$

$$m_1 = 1, \quad m_{11} = 1 + \frac{1}{x}, \quad u_1 = y + z, \quad u_{11} = y + \left(1 + \frac{1}{x}\right)z;$$

$$u' + (1 + m)u = x + m;$$

$$u_1' + 2u_1 = x + 1, \quad u_1 = \frac{2x + 1}{4} + C_1 e^{-2x};$$

$$u'_{11} + \frac{2x+1}{x} u_{11} = \frac{x^2+x+1}{x}, \quad u_{11} = \frac{x^2+1}{2x} + \frac{C_2 e^{-2x}}{\text{[illegible]}};$$

$$y + z = \frac{2x+1}{4} + C_1 e^{-2x} \qquad \Bigg| \qquad y = \frac{3x-1}{4} + (C_1 - C_2 + C_1 x) e^{-2x}$$

$$y + \left(1 + \frac{1}{x}\right) z = \frac{x^2+1}{2x} + \frac{C_2 e^{-2x}}{x} \qquad \Bigg| \qquad z = \frac{2-x}{4} + (C_2 - C_1 x) e^{-2x}.$$

Другой пріемъ:

m пост., $m' = 0$, $(m-1)^2 = 0$; $m = 1$ (двойной корень);

$$u' + (1+m) u = x + m, \quad (u = y + mz)$$

$$u = \frac{x}{1+m} + \frac{m^2+m-1}{(1+m)^2} + C_1 e^{-(1+m)x},$$

$$y + mz = \frac{x}{1+m} + \frac{m^2+m-1}{(1+m)^2} + C_1 e^{-(1+m)x}.$$

Дифференцируемъ по m:

$$z = -\frac{x}{(1+m)^2} + \frac{(2m+1)(1+m) - 2(m^2+m-1)}{(1+m)^3} + \left[\frac{\partial C_1}{\partial m} - C_1 x\right] e^{-(1+m)x}$$

Ставимъ на мѣсто m единицу, а $\frac{\partial C_1}{\partial m}$ обозначаемъ чрезъ C_2 (другая постоянная произвольная):

$$y + z = \frac{2x+1}{4} + C_1 e^{-2x}, \quad z = \frac{2-x}{4} + (C_2 - C_1 x) e^{-2x}.$$

Третій пріемъ:

Исключеніе z и z' изъ уравненій

$$y' + y - z = x, \quad z' + y + 3z = 1, \quad y'' + y' - z' = 1$$

приведетъ къ уравненію:

$$y'' + 4y' + 4y = 3x + 2,$$

котораго полный интегралъ:

$$y = \frac{3x-1}{4} + (c_1 + c_2 x) e^{-2x}.$$

Отыскавши y, найдемъ легко и z:

$$z = y + y' - x = \frac{2-x}{4} + (c_2 - c_1 - c_2 x) e^{-2x}.$$

Чтобы согласовать это рѣшеніе съ прежде полученнымъ, положимъ: $c_3 - c_1 = C_2$, $c_2 - C_1$. .

c)
$$\begin{cases} y' + 2y - 2z = \sin x \\ z' + y + 4z = x \end{cases};$$

$$y' + mz' + (2+m)y - (2-4m)z = \sin x + mx;$$

$$y + mz = u, \ (m \text{ пост.})$$

$$u' - (m^2 - 2m + 2)z + (2+m)u = \sin x + mx;$$

$$m^2 - 2m + 2 = 0, \ m = 1 \pm i \quad (\text{корни мнимые}),$$

$$u' + (2+m)u = \sin x + mx,$$

$$u = Ce^{-(2+m)x} + \frac{(2+m)\sin x - \cos x}{(2+m)^2+1} + \frac{mx}{2+m} - \frac{m}{(2+m)^2},$$

$$y + mz = Ce^{-(2+m)x} + \frac{(2+m)\sin x - \cos x}{(2+m)^2+1} + \frac{mx}{2+m} - \frac{m}{(2+m)^2}.$$

Въ этомъ уравненіи заключаются два уравненія: въ одномъ $m = 1 + i$, въ другомъ $m = 1 - i$. Въ постоянной произвольной C вещественную часть можно отдѣлить отъ мнимой, замѣняя C суммою $C_1 + C_2 i$; тогда если при $m = 1 + i$ беремъ $C_1 + C_2 i$, то при $m = 1 - i$ слѣдуетъ взять $C_1 - C_2 i$. Мы не станемъ подставлять оба значенія m въ послѣднее уравненіе; можно ограничиться однимъ изъ нихъ, и потомъ мнимое уравненіе разложить на два вещественныхъ. Подставляя $1 + i$ на мѣсто m и замѣняя C суммою $C_1 + C_2 i$, получимъ:

$$y + (1+i)z = (C_1 + C_2 i)e^{-(3+i)x} + \frac{(3+i)\sin x - \cos x}{9+6i} + \frac{(1+i)x}{3+i} - \frac{1+i}{8+6i},$$

или:

$$y + z + zi = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-3x} + \frac{11\sin x - 3\cos x}{39} + \frac{20x-7}{50} +$$
$$+ \left[(C_2 \cos x - C_1 \sin x)e^{-3x} + \frac{2\cos x - 3\sin x}{39} + \frac{10x-1}{50}\right]i;$$

а отсюда, разлагая уравненіе на два:

$$y + z = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-3x} + \frac{11\sin x - 3\cos x}{39} + \frac{20x-7}{50}$$

$$z = (C_2 \cos x - C_1 \sin x) e^{-3x} + \frac{2\cos x - 3\sin x}{39} + \frac{10x-1}{50}$$

Вычитая z изъ $y+z$ получимъ и y въ функціи x:

$$y = [(C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + C_2)\sin x] e^{-3x} + \frac{14\sin x - 5\cos x}{39} + \frac{5x-3}{25}.$$

Другой пріемъ:

Исключая z и z' изъ уравненій:

$$y' + 2y - 2z = \sin x,\ z' + y + 4z = x,\ y'' + 2y' - 2z' = \cos x,$$

получимъ уравненіе:

$$y'' + 6y' + 10y = 2x + \cos x + 4\sin x,$$

котораго полный интегралъ:

$$y = \frac{5x-3}{25} + \frac{14\sin x - 5\cos x}{39} + (c_1 \cos x + c_2 \sin x) e^{-3x}.$$

Зная y, найдемъ и z изъ уравненія: $z = \frac{y' + 2y - \sin x}{2}$.

$$z = \frac{10x-1}{50} + \frac{2\cos x - 3\sin x}{39} + \left(\frac{c_2 - c_1}{2}\cos x - \frac{c_2 + c_1}{2}\sin x\right) e^{-3x}.$$

Чтобы согласовать это рѣшеніе съ прежде полученнымъ, положимъ:

$$\frac{c_2 + c_1}{2} = C_1,\ \frac{c_2 - c_1}{2} = C_2.$$

571. Если извѣстны полные интегралы совокупности уравненій:

$$(a) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y' + Py + Qz = 0 \\ z' + P_1 y + Q_1 z = 0 \end{array} \right\},$$

то измѣненіемъ постоянныхъ произвольныхъ въ этихъ интегралахъ можно перейти и къ полнымъ интеграламъ уравненій:

$$(b) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y' + Py + Qz = X \\ z' + P_1 y + Q_1 z = X_1 \end{array} \right\},$$

т. е. отъ интеграловъ уравненій безъ послѣднихъ членовъ — къ интеграламъ уравненій съ послѣдними членами.

Пусть полные интегралы уравненій (a) слѣдующіе:

$$(c)\qquad \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ z = C_1 z_1 + C_2 z_2 \end{cases} \ {}^{*)} \quad \left(\begin{matrix} y_1,\ y_2,\ z_1 \text{ и } z_2 \text{ опредѣ-} \\ \text{ленныя функціи } x. \end{matrix}\right)$$

Принимая (c) за интегралы системы (b), и считая поэтому C_1 и C_2 функціями, продифференцируемъ уравненія (c); получимъ:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2,$$

$$z' = C_1 z_1' + C_2 z_2' + C_1' z_1 + C_2' z_2.$$

Подстановка выраженій y, z, y' и z' въ (b) доставитъ:

$$C_1(y_1' + Py_1 + Qz_1) + C_2(y_2' + Py_2 + Qz_2) + C_1' y_1 + C_2' y_2 = X$$

$$C_1(z_1' + P_1 y_1 + Q_1 z_1) + C_2(z_2' + P_1 y_2 + Q_1 z_2) + C_1' z_1 + C_2' z_2 = X_1;$$

а такъ какъ пары: $\begin{pmatrix} y = y_1 \\ z = z_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y = y_2 \\ z = z_2 \end{pmatrix}$ служатъ частными интегралами системѣ (a), то:

$$\begin{array}{l|l} y_1' + P y_1 + Q z_1 = 0 & y_2' + P y_2 + Q z_2 = 0 \\ z_1' + P_1 y_1 + Q_1 z_1 = 0 & z_2' + P_1 y_2 + Q_1 z_2 = 0; \end{array}$$

и потому, чтобы уравненія (c) были интегралами системы (b), количества C_1 и C_2 должны удовлетворять уравненіямъ:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = X,\quad C_1' z_1 + C_2' z_2 = X_1.$$

Разрѣшая эти уравненія относительно C_1' и C_2' и потомъ интегрируя полученные результаты, найдемъ C_1 и C_2 подъ видомъ:

---

*) Что они имѣютъ такой видъ, — въ этомъ легко удостовѣриться Продифференцируемъ первое изъ уравненій (a), къ результату присоединимъ уравненія (a) и исключимъ z и z'; получимъ уравненіе втораго порядка подъ видомъ:

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (p \text{ и } q \text{ функціи } x).$$

Такъ какъ это уравненіе — линейное относительно y, y' и y'', и безъ послѣдняго члена, то полный интегралъ его будетъ вида: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, откуда: $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$. Подставляя эти y и y' въ первое изъ уравненій (a), получимъ изъ него z подъ видомъ: $C_1 z_1 + C_2 z_2$.

$$C_1 = \psi_1(x) + c_1, \quad C_2 = \psi_2(x) + c_2,$$

гдѣ c_1 и c_2 постоянныя произвольныя; слѣдовательно полные интегралы системы (b) будутъ слѣдующіе:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_1 \psi_1(x) + y_2 \psi_2(x),$$

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + z_1 \psi_1(x) + z_2 \psi_2(x) \quad *).$$

Примѣръ:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y + z = 2e^{x} \\ z' + 3y - z = e^{-x} \end{array} \right\} \qquad (\alpha)$$

Найдемъ сначала двѣ системы частныхъ интеграловъ уравненій:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y + z = 0 \\ z' + 3y - z = 0 \end{array} \right\} \qquad (\beta).$$

Для этого подберемъ α и a такими, чтобы уравненіямъ (β) удовлетворяли функціи:

$$y = e^{\alpha x}, \quad z = a e^{\alpha x}.$$

Дифференцированіе этихъ функцій и потомъ подстановка въ (β) доставитъ:

$$\begin{array}{l|l} y' = \alpha e^{\alpha x} & (\alpha + 1 + a) e^{\alpha x} = 0 \\ z' = a\alpha e^{\alpha x} & (a\alpha + 3 - a) e^{\alpha x} = 0, \end{array}$$

откуда:

$$\alpha + 1 + a = 0, \quad a\alpha + 3 - a = 0.$$

Послѣднія два уравненія даютъ двѣ системы рѣшеній: $\begin{pmatrix} \alpha = 2 \\ a = -3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha = -2 \\ a = 1 \end{pmatrix}$; стало-быть частными интегралами системы (β) будутъ:

---

*) Не трудно видѣть, что если $\begin{pmatrix} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ z = C_1 z_1 + C_2 z_2 \end{pmatrix}$ — полные интегралы системы (a), а $\begin{pmatrix} y = \Theta(x) \\ z = \Theta_1(x) \end{pmatrix}$ — частные интегралы системы (b), то полные интегралы системы (b) будутъ: $\begin{pmatrix} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \Theta(x) \\ z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \Theta_1(x) \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{2x} \\ z = -3e^{2x} \end{array}\right\} \text{ и } \left\{\begin{array}{l} y = e^{-2x}; \\ z = e^{-2x} \end{array}\right\},$$

а полными:

$$\left\{\begin{array}{l} y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \\ z = -3C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \end{array}\right\}. \qquad (\gamma)$$

Принимая теперь (γ) за интегралы системы (α), для опредѣленія C_1 и C_2 имѣемъ:

$$C_1' e^{2x} + C_2' e^{-2x} = 2e^x; \; -3C_1' e^{2x} + C_2' e^{-2x} = e^{-x},$$

откуда:

$$4C_1' = 2e^{-x} - e^{-3x}, \; 4C_2' - 6e^{3x} + e^x,$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\int (2e^{-x} - e^{-3x})\,dx - \quad \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{12} + c_1,$$

$$C_2 = \frac{1}{4}\int (6e^{3x} + e^x)\,dx = \frac{e^{3x}}{2} + \frac{e^x}{4} + c_2,$$

а полные интегралы данной системы (α) будутъ:

$$\left\{\begin{array}{l} y = \frac{e^{-x}}{3} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \\ z - 2e^x - 3c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \end{array}\right\}. \qquad \left(\begin{array}{c} c_1 \text{ и } c_2 \text{ пост.} \\ \text{произвольныя} \end{array}\right)$$

Иначе. Найдемъ частные интегралы данной системы (α) по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ:

$$y - Ae^x + Be^{-x}, \; z = Ce^x + De^{-x};$$

$$y' = Ae^x - Be^{-x}, \; z' = Ce^x - De^{-x},$$

$$y' + y + z = (2A + C)e^x + De^{-x} = 2e^x,$$

$$z' + 3y - z = 3Ae^x + (3B - 2D)e^{-x} = e^{-x};$$

$$2A + C = 2, \; D - 0, \; 3A = 0, \; 3B - 2D = 1;$$

$$A = 0, \; B - \frac{1}{3}, \; C = 2, \; D = 0;$$

$$y = \frac{e^{-x}}{3}, \; z = 2e^x \quad \text{(частные интегралы).}$$

Теперь остается къ этимъ частнымъ интеграламъ присоединить полные интегралы системы (β). Такимъ образомъ полные интегралы системы (α) будутъ:

$$y = \frac{e^{-x}}{3} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$
$$z = 2e^x - 3C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$
(C_1 и C_2 пост. произвольныя)

572. Сказанное на счетъ двухъ линейныхъ уравненій, съ двумя функціями y и z, можно распространить на произвольное число уравненій. Сдѣлаемъ это для трехъ уравненій съ тремя функціями. Пусть независимая перемѣнная t, искомыя функціи ея: x, y и z, а данная система линейныхъ уравненій:

$$x' + P\,x + Q\,y + R\,z = T,$$
$$y' + P_1 x + Q_1 y + R_1 z = T_1,$$
$$z' + P_{11}x + Q_{11}y + R_{11}z = T_{11}.$$

Въ ней P, Q, R, T, P_1, Q_1, R_1, T_1, P_{11}, Q_{11}, R_{11} и T_{11} — функціи t; x', y' и z' — производныя по t. Чтобы проинтегрировать эту систему, введемъ во второе и третье ея уравненія множители m и n и сложимъ произведенія съ первымъ; получимъ:

$$x' + my' + nz' + (P + mP_1 + nP_{11})x + (Q + mQ_1 + nQ_{11})y + (R + mR_1 + nR_{11})z =$$
$$= T + mT_1 + nT_{11}.$$

Затѣмъ, полагая: $x + my + nz = u$, откуда:

$$x' + my' + nz' = u' - m'y - n'z,\quad x = u - my - nz,$$

находимъ:

$$u' + (P + mP_1 + nP_{11})u - [m' + m(P + mP_1 + nP_{11}) - (Q + mQ_1 + nQ_{11})]\,y -$$
$$- [n' + n\,(P + mP_1 + nP_{11}) - (R + mR_1 + nR_{11})]\,z = T + mT_1 + nT_{11}.$$

Подчинимъ множители m и n условіямъ:

$$(\delta)\quad \left\{\begin{array}{l} m' + m\,(P + mP_1 + nP_{11}) - (Q + mQ_1 + nQ_{11}) = 0 \\ n' + n\,(P + mP_1 + nP_{11}) - (R + mR_1 + nR_{11}) = 0 \end{array}\right\};$$

тогда:

$$u' + (P + mP_1 + nP_{11})\, u = \mathrm{T} + m\mathrm{T}_1 + n\mathrm{T}_{11}.$$

Уравненія (δ)—линейныя относительно производныхъ m' и n', но нелинейныя относительно m и n. Если мы въ состояніи найти три пары частныхъ интеграловъ этихъ уравненій, то вопросъ будетъ рѣшенъ. Пусть частные интегралы:

$$\left\{\begin{matrix} m = m_1 \\ n = n_1 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} m = m_2 \\ n = n_2 \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\begin{matrix} m = m_3 \\ n = n_3 \end{matrix}\right\};$$

тогда, обозначая соотвѣтствующія имъ функціи u чрезъ u_1, u_2 и u_3, получимъ:

$$u_1' + (P + m_1 P_1 + n_1 P_{11})\, u_1 = \mathrm{T} + m_1 \mathrm{T}_1 + n_1 \mathrm{T}_{11},$$

$$u_2' + (P + m_2 P_1 + n_2 P_{11})\, u_2 = \mathrm{T} + m_2 \mathrm{T}_1 + n_2 \mathrm{T}_{11},$$

$$u_3' + (P + m_3 P_1 + n_3 P_{11})\, u_3 = \mathrm{T} + m_3 \mathrm{T}_1 + n_3 \mathrm{T}_{11}.$$

Интегрированія каждаго изъ этихъ уравненій, линейныхъ относительно функцій и ихъ производныхъ, доставятъ u_1, u_2 и u_3; искомыя же функціи x, y и z найдутся изъ уравненій:

$$x + m_1 y + n_1 z = u_1,$$

$$x + m_2 y + n_2 z = u_2,$$

$$x + m_3 y + n_3 z = u_3.$$

Въ случаѣ постоянныхъ P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, P_{11}, Q_{11} и R_{11} можно и множители m и n взять постоянными, удовлетворяющими уравненіямъ:

$$m(P + mP_1 + nP_{11}) - (Q + mQ_1 + nQ_{11}) = 0,$$

$$n(P + mP_1 + nP_{11}) - (R + mR_1 + nR_{11}) = 0,$$

или:

$$\frac{P + mP_1 + nP_{11}}{1} = \frac{Q + mQ_1 + nQ_{11}}{m} = \frac{R + mR_1 + nR_{11}}{n}.$$

Обозначая эти равныя между собою отношенія чрезъ λ, получимъ уравненія:

$$P + mP_1 + nP_{11} = \lambda,$$
$$Q + mQ_1 + nQ_{11} = m\lambda,$$
$$R + mR_1 + nR_{11} = n\lambda,$$

изъ которыхъ второе и третье даютъ:

$$m = \frac{-Q(R_{11}-\lambda)+RQ_{11}}{(Q_1-\lambda)(R_{11}-\lambda)-R_1 Q_{11}}, \quad n = \frac{-(Q_1-\lambda)R+R_1 Q}{(Q_1-\lambda)(R_{11}-\lambda)-R_1 Q_{11}};$$

а подставляя эти m и n въ первое, послѣ преобразованія находимъ:

$$(P-\lambda)[(Q_1-\lambda)(R_{11}-\lambda)-Q_{11}R_1]+P_1[Q_{11}R-Q(R_{11}-\lambda)]+$$
$$+P_{11}[QR_1-(Q_1-\lambda)R]=0,$$

или:

$$(P-\lambda)(Q_1-\lambda)(R_{11}-\lambda)-(P-\lambda)Q_{11}R_1-(Q_1-\lambda)P_{11}R-(R_{11}-\lambda)P_1Q+$$
$$+P_1Q_{11}R+P_{11}QR_1=0,$$

—уравненіе третьей степени относительно λ. Оно дастъ три значенія λ; а соотвѣтственно имъ найдемъ и по три значенія m и n.

Въ случаѣ равныхъ или мнимыхъ значеній m и n, преобразованія подобны вышеприведеннымъ.

573. Обратимся опять къ **совокупности двухъ уравненій съ тремя перемѣнными** x, y **и** z **и ихъ дифференціалами, перваго порядка и первой степени.** Подобную совокупность, какъ выше видѣли, можно привести къ виду:

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \qquad \left(\begin{matrix} X, Y \text{ и } Z \text{ функ-} \\ \text{ціи } x, y \text{ и } z \end{matrix}\right)$$

Представимъ полные интегралы ея разрѣшенными относительно постоянныхъ произвольныхъ, т. е. подъ видомъ:

$$(2) \qquad \begin{aligned} f_1(x,y,z) &= C_1, \\ f_2(x,y,z) &= C_2. \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix} \text{Функціи } f_1 \text{ и } f_2 \\ \text{независимы.} \end{matrix}\right)$$

Дифференцируя (2), получимъ:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz &= 0, \end{aligned}$$

или, замѣняя dx, dy и dz количествами, имъ пропорціональными:

$$(4)\qquad \begin{aligned} X\frac{\partial f_1}{\partial x}+Y\frac{\partial f_1}{\partial y}+Z\frac{\partial f_1}{\partial z}=0,\\ X\frac{\partial f_2}{\partial x}+Y\frac{\partial f_2}{\partial y}+Z\frac{\partial f_2}{\partial z}=0. \end{aligned}$$

Равенства (4), какъ не заключающія въ себѣ C_1 и C_2, тождественны, т. е. удовлетворяются всѣми значеніями x, y и z. Дѣйствительно: хотя y и z — функціи x; но эти функціи заключаютъ въ себѣ количества C_1 и C_2, распоряжаясь которыми, мы можемъ при всякомъ данномъ x сдѣлать y и z какими угодно.

И такъ: если уравненія (2) представляютъ полные интегралы системы (1), то функціи f_1 и f_2, подставленныя на мѣсто f въ уравненіе:

$$(5)\qquad X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

удовлетворяютъ ему, т. е. обращаютъ его въ тождество.

Обратно: если функція f удовлетворяетъ уравненію (5), то равенство $f=C$ будетъ однимъ изъ интеграловъ системы (1). Дѣйствительно: дифференцируя функцію f, получимъ:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Если же въ f перемѣнныя y и z будутъ такими функціями x, которыя удовлетворяютъ системѣ (1), то, обозначая равныя между собою отношенія: $\frac{dx}{X}$, $\frac{dy}{Y}$ и $\frac{dz}{Z}$ чрезъ λ, будемъ имѣть:

$$dx=\lambda X,\ dy=\lambda Y,\ dz=\lambda Z,$$

и потому:

$$df=\lambda\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

а такъ какъ f удовлетворяетъ (5), то $df=0$, и стало-быть f величина постоянная.

И такъ: если f удовлетворяетъ (5), то однимъ изъ интеграловъ совокупности (1) можно принять: $f=C$. Стало-быть: если двѣ независимыя функціи f_1 и f_2, удовлетворяютъ уравненію въ частныхъ производныхъ:

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

то уравненія:

$$(6)\qquad f_1=C_1,\ f_2=C_2$$

будутъ полными интегралами совокупности:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}.$$

Для повѣрки продифференцируемъ (6); затѣмъ напишемъ уравненія, которымъ удовлетворяютъ f_1 и f_2; получимъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz=0 \qquad X\frac{\partial f_1}{\partial x}+Y\frac{\partial f_1}{\partial y}+Z\frac{\partial f_1}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz=0 \qquad X\frac{\partial f_2}{\partial x}+Y\frac{\partial f_2}{\partial y}+Z\frac{\partial f_2}{\partial z}=0;$$

а эти четыре уравненія и приведутъ къ пропорціональности дифференціаловъ dx, dy и dz функціямъ X, Y и Z.

Теперь спрашивается: сколько же имѣетъ рѣшеній уравненіе:

$$(a)\qquad X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

т. е. сколько функцій f (функцій независимыхъ перемѣнныхъ x, y и z), ему удовлетворяющихъ? Мы докажемъ сейчасъ, что ихъ безчисленное множество; но если между ними выберемъ двѣ независимыхъ, то остальныя будутъ функціями этихъ двухъ. Докажемъ сперва, что если функціи f_1, f_2, f_3, ... удовлетворяютъ уравненію (a), т. е. даютъ тождества:

$$X\frac{\partial f_1}{\partial x}+Y\frac{\partial f_1}{\partial y}+Z\frac{\partial f_1}{\partial z}=0$$

$$X\frac{\partial f_2}{\partial x}+Y\frac{\partial f_2}{\partial y}+Z\frac{\partial f_2}{\partial z}=0$$

$$X\frac{\partial f_3}{\partial x}+Y\frac{\partial f_3}{\partial y}+Z\frac{\partial f_3}{\partial z}=0$$

. . . .

. . . . ,

то и всякая функція этихъ функцій также удовлетворитъ ему. Полагая:

$$f = \varphi(f_1, f_2, f_3, \ldots),$$

гдѣ φ функція произвольная, имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial x} + \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial z} + \ldots;$$

по этому:

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_1}\left(X\frac{\partial f_1}{\partial x} + Y\frac{\partial f_1}{\partial y} + Z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) +$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\left(X\frac{\partial f_2}{\partial x} + Y\frac{\partial f_2}{\partial y} + Z\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) +$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial f_3}\left(X\frac{\partial f_3}{\partial x} + Y\frac{\partial f_3}{\partial y} + Z\frac{\partial f_3}{\partial z}\right) +$$

....

.............................,

или:

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

И такъ функція f, равная $\varphi(f_1, f_2, f_3, \ldots)$, при всякомъ φ удовлетворяетъ (a).

Докажемъ теперь, что уравненіе (a) не можетъ имѣть болѣе двухъ независимыхъ рѣшеній. Для этого допустимъ, что три независимыхъ между собою функціи f_1, f_2 и f_3 удовлетворяютъ уравненію (a), и разрѣшимъ уравненія:

$$f_1(x, y, z) = f_1,\ f_2(x, y, z) = f_2,\ f_3(x, y, z) = f_3$$

относительно x, y и z; тогда получимъ уравненія вида:

$$x = \varphi_1(f_1, f_2, f_3),\ y = \varphi_2(f_1, f_2, f_3),\ z = \varphi_3(f_1, f_2, f_3).$$

Отсюда видимъ, что перемѣнныя x, y и z, какъ функціи функцій f_1, f_2 и f_3, должны удовлетворять уравненію (a). Но полагая послѣдовательно: $f = x$, $f = y$, $f = z$, найдемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0, \text{ въ случаѣ: } f=x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=1,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0, \text{ въ случаѣ: } f=y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}=1, \text{ въ случаѣ: } f=z,$$

при чемъ уравненіе (*a*) обращается послѣдовательно въ:

$$X=0\,(\text{при } f=x),\quad Y=0\,(\text{при } f=y),\quad Z=0\,(\text{при } f=z),$$

т. е. каждый коэффиціентъ его есть 0, — что, конечно, не имѣетъ мѣста.

Итакъ: *если два частныхъ независимыхъ между собою рѣшенія уравненія*:

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

будутъ: $f=f_1$, $f=f_2$, *то общее рѣшеніе этого уравненія* (въ которомъ заключались-бы всѣ частныя), или *общій интегралъ его, можно представить подъ видомъ*:

$$f=\varphi(f_1,\ f_2). \qquad \left(\begin{matrix}\varphi \text{ произвольная}\\ \text{функція}\end{matrix}\right)$$

Изъ этого общаго интеграла можно получить безчисленное множество паръ независимыхъ между собою частныхъ интеграловъ; по этому и полные интегралы системы:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$$

можно представлять въ разнообразныхъ формахъ. Такъ если функціи $\varphi_1(f_1,\ f_2)$ и $\varphi_2(f_1,\ f_2)$ независимы, то полные интегралы послѣдней системы можно представить подъ видомъ:

$$\varphi_1(f_1,\ f_2)=c_1,\quad \varphi_2(f_1,\ f_2)=c_2,$$

— что впрочемъ и само по себѣ очевидно, — потому что два уравненія $f_1=C_1$ и $f_2=C_2$ всегда можно замѣнить двумя другими, изъ нихъ вытекающими, и при томъ безчисленными манерами; а такъ какъ изъ нихъ имѣемъ:

$$\varphi_1(f_1,\ f_2)=\varphi_1(C_1,\ C_2),\quad \varphi_2(f_1,\ f_2)=\varphi_2(C_1,\ C_2),$$

то, обозначая постоянныя произвольныя $\varphi_1(C_1, C_2)$ и $\varphi_2(C_1, C_2)$ чрезъ c_1 и c_2, получимъ:

$$\varphi_1(f_1, f_2) = c_1, \ \varphi_2(f_1, f_2) = c_2.$$

Примѣръ:

Полные интегралы системы:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{z^2}$$

можно представить уравненіями:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = C_1, \ \frac{z}{y} = C_2.$$

По этому общій интегралъ уравненія:

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + yz\frac{\partial f}{\partial y} + z^2\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

будетъ:

$$f = \varphi\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}, \ \frac{z}{y}\right); \qquad \left(\begin{array}{c}\varphi \text{ произволь-}\\ \text{ная функція}\end{array}\right)$$

а разумѣя подъ $\varphi(f_1, f_2)$ послѣдовательно:

$$f_1, f_2, \frac{f_2}{f_1}, f_1 f_2, \ l(f_1 + f_2), \ \sin \sqrt[3]{f_2^2 + 2f_1 f_2 + \operatorname{arc\,tg}\frac{f_2}{f_1}},$$

получимъ слѣдующіе частные интегралы того же уравненія:

$$f = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}, \ f = \frac{z}{y}, \ f = \frac{xz^2}{(x-z)y}, \ f = \frac{x-z}{xy},$$

$$f = l\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x} + \frac{z}{y}\right), \ f = \sin \sqrt[3]{\frac{z^2}{y^2} + \frac{2(x-z)}{xy} + \operatorname{arc\,tg}\frac{xz^2}{y(x-z)}}.$$

574. Разсужденія n° 573, въ примѣненіи къ системѣ n дифференціальныхъ уравненій вида:

$$(a) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

въ которыхъ $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ функціи $n+1$ перемѣнныхъ $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, приведутъ къ слѣдующимъ заключеніямъ.

Если полные интегралы этой системы представить разрѣшенными относительно постоянныхъ произвольныхъ, т. е. подъ видомъ:

$$f_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1$$

$$f_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_n,$$

то функціи $f_1, f_2, \ldots, f_n$ удовлетворяютъ уравненію:

$$(b) \qquad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0;$$

другими словами: каждая изъ нихъ, подставленная на мѣсто f въ это уравненіе, обращаетъ его въ тождество.

Обратно: если функція $f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяетъ уравненію (b), то уравненіе $f = C$ будетъ однимъ изъ интеграловъ системы (a).

Если функціи $f_1, f_2, \ldots$ удовлетворяютъ уравненію (b), то ему удовлетворитъ и $\varphi(f_1, f_2, \ldots)$,—произвольная функція $f_1, f_2, \ldots$

Число независимыхъ между собою частныхъ интеграловъ уравненія (b) не можетъ быть болѣе n.

Если независимыя между собою функціи $f_1, f_2, \ldots, f_n$ удовлетворяютъ уравненію (b), то общій интегралъ этого уравненія будетъ: $f = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. ($\varphi$ функція произвольная).

УРАВНЕНІЯ ВЪ ЧАСТНЫХЪ ПРОИЗВОДНЫХЪ.

575. Дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ, при двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y и одной функціи ихъ z, имѣетъ видъ:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right) = 0.$$

Всякую функцію z, ему удовлетворяющую,—иначе—всякое уравненіе, связывающее z съ x и y (не содержащее производныхъ z), изъ котораго оно вытекаетъ, называютъ его *интеграломъ*.

Напримѣръ: уравненіе $x\frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial y} - 3z = 0$ имѣетъ слѣдующіе интегралы:

$$z=x^3,\ z=2x^4+x^3y,\ z=\frac{x^3}{(2x+y)^2},$$
$$z=x^3\sqrt{1+2x+y},\ z=x^3 l\,(2x+y),\ \text{и проч};$$

ихъ безчисленное множество, и заключаются они всѣ въ одномъ общемъ: $z=x^3\,\varphi\,(2x+y)$. (φ — функція произвольная) *).

Пусть уравненіе вида:

$$(a)\qquad \frac{\partial^k z}{\partial x^k}=\varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \ldots\right),$$

и во второй части его производныя относительно x — порядковъ не выше $k-1$. Дифференцируя его по x, замѣняя при этомъ производную z порядка k функціею φ, мы получимъ рядъ производныхъ: $\frac{\partial^{k+1} z}{\partial x^{k+1}}$, $\frac{\partial^{k+2} z}{\partial x^{k+2}}, \ldots$, выраженныхъ въ x, y, z и производныхъ z по x и по y, порядковъ по отношенію къ x не превышающихъ $k-1$. Обозначимъ функціи: $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$ при $x=x_0$ чрезъ z_0, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0, \ldots$, и развернемъ z по степенямъ $x-x_0$; получимъ:

$$(b)\qquad z=z_0+(x-x_0)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0+\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_0+\ldots.$$

Функціи: z_0, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0, \ldots$ не зависятъ отъ x; онѣ получаются изъ $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$, когда перемѣнной x дается частное значеніе x_0; но онѣ зависятъ отъ y. Если въ разложеніи (b) считать z_0, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1}}\right)_0$ произвольными функціями y, а $\left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^{k+1} z}{\partial x^{k+1}}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^{k+2} z}{\partial x^{k+2}}\right)_0$ замѣнить равными имъ выраженіями въ этихъ функціяхъ и ихъ производнѣхъ по y, то (b) будетъ интеграломъ (a). Онъ будетъ *общимъ*, когда въ немъ k произвольныхъ функцій остаются какими угодно, и *частнымъ*, когда эти функціи — опредѣленныя.

Если-бы выразили изъ даннаго уравненія высшую производную z относительно y, то подобныя же разсужденія привели-бы къ разложенію z по степенямъ $y-y_0$. Число произвольныхъ функцій въ разложеніи, зависящихъ въ этомъ случаѣ только отъ x, было-бы, вообще говоря, другое.

---

*) Еще примѣры см. въ n° n° 119 и 121 первой части.

Для примѣра возьмемъ уравненіе:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Дифференцируя его по y, опираясь при этомъ на него же послѣ каждаго дифференцированія, получимъ:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x$$

$$\frac{\partial^5 z}{\partial y^5} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\, \partial x} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)'_x$$

$$\frac{\partial^6 z}{\partial y^6} = \frac{\partial^4 z}{\partial y^3\, \partial x} = \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^7 z}{\partial y^7} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)'_x = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)''_{x,\, x}, \text{ и т. д.}$$

z, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ при $y = y_0$ будутъ произвольными функціями x; пусть онѣ: $\psi(x)$, $\xi(x)$ и $\zeta(x)$; тогда, обозначая $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}, \ldots$ при $y = y_0$ чрезъ $\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)_0, \ldots$, получимъ:

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y = y_0} = \psi'(x)$$

$$\left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)_0 = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0\right]'_x = \xi'(x)$$

$$\left(\frac{\partial^5 z}{\partial y^5}\right)_0 = \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0\right]'_x = \zeta'(x)$$

$$\left(\frac{\partial^6 z}{\partial y^6}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{y = y_0} = \psi''(x), \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно:

$$z = \psi(x) + (y - y_0)\,\xi(x) + \frac{(y-y_0)^2}{1.2}\,\zeta(x) + \frac{(y-y_0)^3}{1.2.3}\,\psi'(x) + \frac{(y-y_0)^4}{1.2.3.4}\,\xi'(x) + \\ + \frac{(y-y_0)^5}{1.2.3.4.5}\,\zeta'(x) + \ldots.$$

Теперь развернемъ z по степенямъ $x - x_0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 z}{\partial y^3\,\partial x} = \frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3} = \frac{\partial^6 z}{\partial y^6}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial^7 z}{\partial y^6\,\partial x} = \frac{\partial^7 z}{\partial x\,\partial y^6} = \frac{\partial^9 z}{\partial y^9}, \text{ и т. д.}$$

z при $x = x_0$ будетъ произвольная функція y; пусть она $\theta(y)$; тогда:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \theta'''(y),\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = \theta^{(6)}(y),\ \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_0 = \theta^{(9)}(y),\ \ldots.$$

Слѣдовательно:

$$z = \theta(y) + (x - x_0)\,\theta'''(y) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\theta^{(6)}(y) + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}\theta^{(9)}(y) + \ldots.$$

Въ первомъ разложеніи z (по степенямъ $y - y_0$) входятъ три произвольныхъ функціи: $\psi(x)$, $\xi(x)$ и $\zeta(x)$, во второмъ (по степенямъ $x - x_0$) — одна: $\theta(y)$. Не смотря на то, функціи, которыя доставляетъ первый рядъ, можно получить и изъ втораго, и наоборотъ. Сдѣлаемъ напр.:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ \psi(x) = 6x + 1,\ \xi(x) = 24x - 5,\ \zeta(x) = 120x,$$

и посмотримъ, какова должна-быть функція $\theta(y)$, чтобы второе разложеніе z давало тотъ же результатъ, какъ и первое. Первое при взятомъ положеніи дастъ:

$$z = 6x + 1 + (24x - 5)y + 60xy^2 + y^3 + y^4 + y^5;$$

а второе, полагая: $\theta(y) = ay^5 + by^4 + cy^3 + hy^2 + ey + g$, дастъ:

$$z = ay^5 + by^4 + cy^3 + hy^2 + ey + g + (60ay^2 + 24by + 6c)x,$$

или:

$$z = ay^5 + by^4 + cy^3 + (h + 60ax)y^2 + (e + 24bx)y + g + 6cx,$$

что приводится къ первому, когда: $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $h = 0$, $e = -5$, $g = 1$, т. е. когда: $\theta(y) = y^5 + y^4 + y^3 - 5y + 1$.

Наоборотъ, задавши $\theta(y)$, можно подобрать соотвѣтствующія $\psi(x)$, $\xi(x)$ и $\zeta(x)$. Такъ, если сдѣлать: $\theta(y) = y^4 + 2y^3 + y^2 - 6y + 1$, то: $\psi(x) = 12x + 1$, $\xi(x) = 24x - 6$, $\zeta(x) = 2$, и тогда:

$$z = y^5 + 2y^3 + y^2 - 6y + 1 + (24y + 12)x$$

$$= 12x + 1 + (24x - 6)y + y^2 + 2y^5 + y^4.$$

Чтобы повѣрить удовлетворяютъ-ли найденныя разложенія z данному дифференціальному уравненію, продифференцируемъ ихъ одинъ разъ по x и три раза по y; первое дастъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \psi'(x) + (y-y_0)\xi'(x) + \frac{(y-y_0)^2}{1.2}\zeta'(x) + \dots .$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \psi'(x) + (y-y_0)\xi'(x) + \frac{(y-y_0)^2}{1.2}\zeta'(x) + \dots .$$

а второе:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \theta'''(y) + (x-x_0)\,\theta^{(6)}(y) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\theta^{(9)}(y) + \dots$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \theta'''(y) + (x-x_0)\,\theta^{(6)}(y) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\theta^{(9)}(y) + \dots ,$$

откуда видимъ, что: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

576. Приведемъ примѣръ нахожденія интеграла по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Пусть дано уравненіе:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}. \qquad (1)$$

Для отысканія функціи z, ему удовлетворяющей, положимъ:

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots ; \ (A,\ B,\ C, \dots \text{ функціи } y)$$

тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots .$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B_y' + 2C_y'x + 3D_y'x^2 + \dots .$$

Подставляя эти производныя въ (1), получимъ:

$$B_y' + 2C_y'x + 3D_y'x^2 + \dots = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots ,$$

откуда:

$$B_y' = B,\ C_y' = C,\ D_y' = D, \dots$$

Интегрированіе послѣднихъ уравненій доставитъ функціи B, C, $D \dots$

$B = be^y$, $C = ce^y$, $D = \partial\, e^y$, ... (b, c, ∂, ... пост. произвольныя).

Коэффиціентъ A — произвольная функція y; обозначая ее чрезъ $\psi(y)$, имѣемъ:

$$z = \psi(y) + (bx + cx^2 + dx^3 + \ldots) e^y,$$

или:

$$z = \psi(y) - ae^y + (a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots) e^y.$$

Здѣсь двучленъ $\psi(y) - ae^y$ — произвольная функція y, а сумма $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)$ — произвольная функція x. Обозначая первую чрезъ $\xi(y)$, вторую чрезъ $\theta(x)$, имѣемъ:

$$z = \xi(y) + e^y \theta(x).$$

Вотъ общій интегралъ уравненія (1), представленный въ конечномъ видѣ. Найдемъ его теперь, развертывая z по степенямъ y:

$$z = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \text{ функціи } x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha_x' + \beta_x' y + \gamma_x' y^2 + \delta_x' y^3 + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \beta_x' + 2\gamma_x' y + 3\delta_x' y^2 + \ldots;$$

$$\beta_x' + 2\gamma_x' y + 3\delta_x' y^2 + \ldots = \alpha_x' + \beta_x' y + \gamma_x' y^2 + \ldots,$$

$$\beta_x' = \alpha_x', \quad 2\gamma_x' = \beta_x', \quad 3\delta_x' = \gamma_x', \ldots,$$

$$\beta_x' = \alpha_x', \quad \gamma_x' = \frac{1}{1.2}\alpha_x', \quad \delta_x' = \frac{1}{1.2.3}\alpha_x', \ldots,$$

$$\beta = \alpha + b_1, \quad \gamma = \frac{1}{1.2}\alpha + c_1, \quad \delta = \frac{1}{1.2.3}\alpha + d_1, \ldots \quad \left(\begin{matrix} b_1, c_1, d_1, \ldots \text{ пост.} \\ \text{произвольныя} \end{matrix}\right)$$

α произвольная функція x; обозначимъ ее чрезъ $\theta_1(x)$.

$$z = \alpha + (\alpha + b_1)y + \left(\frac{1}{1.2}\alpha + c_1\right)y^2 + \left(\frac{1}{1.2.3}\alpha + d_1\right)y^3 + \ldots$$

$$= \alpha\left(1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots\right) + b_1 y + c_1 y^2 + d_1 y^3 + \ldots$$

$$= e^y \theta_1(x) + b_1 y + c_1 y^2 + d_1 y^3 + \ldots$$

$$= e^y [\theta_1(x) - a_1] + a_1 e^y + b_1 y + c_1 y^2 + d_1 y^3 + \ldots \quad (a_1 \text{ пост. произвольная}).$$

Обозначая произвольныя функціи $[\theta_1(x) - a_1]$ и $[a_1 e^y + b_1 y + c_1 y^2 + \ldots]$, первую чрезъ $\theta(x)$, вторую чрезъ $\xi(y)$, получимъ:

$$z = e^y \theta(x) + \xi(y)$$

Интегралъ этотъ легко получить прямо въ конечномъ видѣ. Положеніемъ $\frac{\partial z}{\partial x} = u$ мы обратимъ данное уравненіе въ слѣдующее:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u\,,$$

откуда:

$$u = e^y \zeta(x) \quad (\zeta \text{ произвольная функція});$$

стало-быть:

$$z = \int e^y \zeta(x)\,dx = e^y \theta(x) + \xi(y). \quad \left(\begin{matrix}\theta \text{ и } \xi \text{ произвольныя} \\ \text{функціи}\end{matrix}\right)$$

Само собою разумѣется, что мы не станемъ интегралъ уравненія выражать строкою, если въ состояніи представить его въ конечномъ видѣ; результатъ же, полученный подъ видомъ строки безъ остаточнаго члена, хотя-бы строка была сходящеюся, вообще говоря, остается подъ сомнѣніемъ и требуетъ подтвержденія.

Линейныя уравненія перваго порядка.

577. Уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка, линейное относительно производныхъ, *можно представить подъ видомъ:*

$$(1) \qquad X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z\,,$$

гдѣ X, Y и Z функціи x, y и z. Пусть интегралъ его:

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

Дифференцируя интегралъ по x и по y, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Опредѣляя отсюда производныя $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и подставляя ихъ въ (1), мы обратимъ уравненіе (1) въ слѣдующее:

$$(3) \qquad X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Стало-быть интегрированіе уравненія (1) приводится къ интегрированію (3), т. е. къ розысканію такой функціи f (перемѣнныхъ x, y и z), которая удовлетворяла-бы уравненію (3). Послѣдній вопросъ мы разсматривали въ n⁰ 573. Тамъ видѣли, что для отысканія общаго интеграла уравненія (3), надобно обратиться къ совокупности уравненій:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z},$$

проинтегрировать ихъ и интегралы представить разрѣшенными относительно постоянныхъ произвольныхъ, т. е. подъ видомъ:

$$f_1(x,y,z)=C_1,\ f_2(x,y,z)=C_2;$$

тогда f_1 и f_2 будутъ независимыми между собою функціями, удовлетворяющими (3); а общій интегралъ уравненія (3):

$$f=\varphi(f_1,f_2).\quad (\varphi \text{ произвольная функція})$$

Слѣдовательно интеграломъ уравненія (1) будетъ:

$$\varphi(f_1,f_2)=0,$$

или:

$$(4)\qquad f_2=\theta(f_1).\quad (\theta \text{ произвольная функція})$$

Хотя въ (4) заключается безчисленное множество интеграловъ, — тѣмъ не менѣе представляется вопросъ: всѣ-ли тутъ интегралы; нѣтъ-ли такихъ, которые, удовлетворяя (1), не заключаются въ (4)? Другими словами: нѣтъ-ли такихъ функцій f, которыя обращали-бы (3) въ тождество не при всѣхъ значеніяхъ x, y и z, а только при тѣхъ, которыя удовлетворяютъ (2). Такія функціи есть; но ихъ можно замѣнить функціями вида $\varphi(f_1,f_2)$. Дѣйствительно: выражая y и z изъ уравненій:

$$f_1(x,y,z)=f_1,\ f_2(x,y,z)=f_2$$

въ зависимости отъ x, f_1 и f_2, и подставляя въ $f(x,y,z)=0$, мы приведемъ послѣднее уравненіе къ уравненію вида: $\psi(x,f_1,f_2)=0$; стало-быть, если замѣнить f чрезъ ψ, то производныя f по x, по y и по z будутъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial z};$$

а сумма $X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}$ обратится въ слѣдующую:

$$X\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial f_1}\left(X\frac{\partial f_1}{\partial x} + Y\frac{\partial f_1}{\partial y} + Z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial f_2}\left(X\frac{\partial f_2}{\partial x} + Y\frac{\partial f_2}{\partial y} + Z\frac{\partial f_2}{\partial z}\right).$$

Эта сумма равна 0; входящіе въ нее трехчлены, заключенные въ скобки, также нули: слѣдовательно:

$$X\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Отсюда, предполагая X отличнымъ отъ 0, имѣемъ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0;$$

стало-быть въ функцію ψ не входитъ x явнымъ образомъ, т. е. ψ есть функція f_1 и f_2.

Если $X = 0$, то, выражая x и z въ y, f_1 и f_2, мы приведемъ $f(x, y, z)$ къ функціи вида: $\xi(y\ f_1, f_2)$, — и тогда:

$$Y\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0;$$

а отсюда, предполагая Y отличнымъ отъ 0, заключаемъ, что функція ξ не содержитъ y, и стало-быть f выражается только въ f_1 и f_2.

Въ случаѣ $X = 0$ и $Y = 0$ коэффиціентъ Z также обращается въ 0, — иначе не удовлетворялось-бы уравненіе (1). Такой случай, вообще говоря, не имѣетъ мѣста; въ частности же представится, когда существуетъ функція z (функція перемѣнныхъ x и y), обращающая въ 0 каждый изъ коэффиціентовъ X, Y и Z, — и тогда мы отнесемъ эту функцію къ особеннымъ рѣшеніямъ уравненія (1).

И такъ въ (4) заключаются всѣ интегралы уравненія:

$$(1) \qquad X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z;$$

другими словами: (4) есть общій интегралъ этого уравненія. Чтобы получить его, составляемъ вспомогательныя совокупныя уравненія:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z},$$

интегрируемъ ихъ, и полные интегралы ихъ:

$$F_1(x, y, z, C_1, C_2)=0,\ \ F_2(x, y, z, C_1, C_2)=0$$

приводимъ къ виду:

$$f_1(x, y, z)=C_1,\ f_2(x, y, z)=C_2;$$

тогда искомый общій интегралъ уравненія (1) будетъ:

$$\varphi\left(f_1(x, y, z),\ f_2(x, y, z)\right)=0, \quad (\varphi \text{ произвольная функція})$$

или:

$$f_2(x, y, z)=\Theta\left(f_1(x, y, z)\right). \quad (\Theta \text{ произвольная функція})$$

Примѣры:

a) $$yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy;$$

вспомогательныя совокупныя уравненія: $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{xy}$;

полные интегралы ихъ: $x^2-y^2=C_1$, $z^2-x^2=C_2$;

общій интегралъ даннаго уравненія:

$$z^2-x^2=\Theta(x^2-y^2), \text{ или: } z=\sqrt{x^2+\Theta(x^2-y^2)} \quad \left(\begin{matrix}\Theta \text{ произволь-}\\ \text{ная фунція}\end{matrix}\right).$$

Разумѣя подъ $\Theta(u)$ послѣдовательно функціи: u, $3u$, $-u$, $\sqrt{u}$, $l\sin u$, . . ., получимъ слѣдующіе частные интегралы:

$$z=\sqrt{2x^2-y^2},\ z=\sqrt{4x^2-3y^2},\ z=\pm y,$$

$$z=\sqrt{x^2+\sqrt{x^2-y^2}},\ z=\sqrt{x^2+l\sin(x^2-y^2)}, \ldots$$

b) $$xz^4\frac{\partial z}{\partial x}+yz^4\frac{\partial z}{\partial y}=x^3y^2;$$

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{dx}{xz^4}=\dfrac{dy}{yz^4}=\dfrac{dz}{x^2y^2}\\[2ex] \dfrac{y}{x}=C_1,\ 5x^2y^2-4z^5=C_2\end{matrix}\right\} \quad \left(\begin{matrix}\text{вспомогательныя уравне-}\\ \text{нія и интегралы ихъ за-}\\ \text{ключаемъ въ скобки}\end{matrix}\right).$$

$$5x^2y^2 - 4z^5 = \theta\left(\frac{y}{x}\right). \quad (\theta \text{ произвольная функція}).$$

c) $$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (3x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 4xz;\ z = e^{x+y+\theta(y^2+2xy-3x^2)}.$$

d) $$x^3\frac{\partial z}{\partial x} + y^3\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^3}{y};\ z = x + \frac{x^2}{y} + \theta\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right).$$

e) $$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2;$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z-x^2-y^2}; \\[2ex] \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y},\ \dfrac{y}{x} = C_1; \\[2ex] \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z-x^2-C_1{}^2x^2},\ \dfrac{zdx-xdz}{x^2} - (1+C_1{}^2)dx = 0, \\[2ex] \dfrac{z}{x} + (1+C_1{}^2)x = C_2,\ \dfrac{z+x^2+y^2}{x} = C_2. \end{array}\right\}$$

$$z = x\,\theta\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2.$$

f) $$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = z;$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{x+y} = \dfrac{dy}{-(x-y)} = \dfrac{dz}{z}; \\[2ex] (x-y)dx + (x+y)dy = 0,\ l\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = C_1; \\[2ex] \dfrac{xdx}{x^2+xy} = \dfrac{ydy}{-xy+y^2} = \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \dfrac{dz}{z},\ \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = C_2 \end{array}\right\}$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\,\theta\left(l\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right).$$

578. Въ n° n° 241, 242, 243, 247 и 248 мы дифференцированіемъ исключали произвольныя функціи, входящія въ уравненія поверхностей цилиндрическихъ, коническихъ, коноидальныхъ и поверхностей вращенія, и находили такимъ образомъ уравненія этихъ поверхностей въ частныхъ производныхъ. Теперь поступимъ обратно: изъ уравненій ихъ въ частныхъ производныхъ найдемъ интегрированіемъ уравненія ихъ въ обыкновенномъ видѣ:

a) *Цилиндрич. поверхность*: $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$; (n° 241)

$$\left[\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1};\ x - az = C_1,\ y - bz = C_2.\right]$$

$$y - bz = \varphi(x - az).$$ (φ произвольная функція).

b) *Коническая*: $(x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0$; (n⁰ 242)

$$\left[\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0};\ \frac{x - x_0}{z - z_0} = C_1,\ \frac{y - y_0}{z - z_0} = C_2.\right]$$

$$\frac{y - y_0}{z - z_0} = \varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}\right).$$

c) *Коноидальная*, съ прямолинейной направляющей OZ:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$ (n⁰ 243)

$$\left[\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0};\ \frac{y}{x} = C_1,\ z = C_2\right]$$

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

d) *Коноидальная*, съ прямолинейной направляющей $\begin{pmatrix} x = az + h \\ y = bz + k \end{pmatrix}$:

$$(x - az - h)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - bz - k)\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$ (n⁰ 243)

$$\left[\frac{dx}{x - az - h} = \frac{dy}{y - bz - k} = \frac{dz}{0};\ z = C_2,\ \frac{y - bz - k}{x - az - h} = C_1\right]$$

$$z = \varphi\left(\frac{y - bz - k}{x - az - h}\right).$$

e) *Поверхность вращенія*, съ осью вращенія OZ:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$ (n⁰ 247)

$$\left[\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{0};\ x^2 + y^2 = C_1,\ z = C_2\right]$$

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

f) *Поверхность вращенія*, съ осью вращенія $\begin{pmatrix} x = az + h \\ y = bz + k \end{pmatrix}$:

$$(y - bz - k)\frac{\partial z}{\partial x} - (x - az - h)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x - h) - a(y - k);$$ (n⁰ 248)

$$\left\{\begin{array}{c}
\dfrac{dx}{y-bz-k}=\dfrac{dy}{-(x-az-h)}=\dfrac{dz}{b(x-h)-a(y-k)};\\
\dfrac{adx}{a(y-bz-k)}=\dfrac{bdy}{-b(x-az-h)}=\dfrac{dz}{b(x-h)-a(y-k)}=\dfrac{adx+bdy+dz}{0},\\
adx+bdy+dz=0,\quad ax+by+z=C_1;
\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}
\dfrac{(x-h)\,dx}{(x-h)(y-bz-k)}=\dfrac{(y-k)\,dy}{-(y-k)(x-az-h)}=\dfrac{zdz}{z\,[b(x-h)-a(y-k)]}=\\
=\dfrac{(x-h)\,dx+(y-k)\,dy+zdz}{0},\\
(x-h)\,dx+(y-k)\,dy+zdz=0,\quad (x-h)^2+(y-k)^2+z^2=C_2
\end{array}\right\}$$

$$ax+by+z=\varphi\left[(x-h)^2+(y-k)^2+z^2\right].$$

Уравненія высшихъ порядковъ.

Линейныя уравненія.

579. *Уравненіе въ частныхъ производныхъ n-го порядка, съ двумя независимыми перемѣнными, линейное относительно искомой функціи и ея производныхъ, безъ послѣдняго члена, съ постоянными коэффиціентами*, имѣетъ видъ:

$$az+b\frac{\partial z}{\partial x}+b_1\frac{\partial z}{\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+c_1\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c_2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\ldots$$

$$\ldots+p\frac{\partial^n z}{\partial x^n}+p_1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}+\ldots+p_n\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=0.$$

(x и y перемѣнныя независимыя, z искомая функція,
a, b, b_1, c, c_1, c_2, ..., p, p_1, ..., p_n постоянныя)

Если ему удовлетворяютъ функціи: $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k$, то удовлетворитъ и сумма: $C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3+\ldots+C_kz_k$, въ которой $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$ — постоянныя произвольныя.

Найдемъ такія значенія α и β, при которыхъ функція $e^{\alpha x+\beta y}$ удовлетворяла-бы взятому уравненію. Дифференцируя $z=e^{\alpha x+\beta y}$, получимъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\alpha e^{\alpha x+\beta y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\beta e^{\alpha x+\beta y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \alpha\beta e^{\alpha x + \beta y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \beta^2 e^{\alpha x + \beta y},$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \alpha^n e^{\alpha x + \beta y}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} = \alpha^{n-1}\beta e^{\alpha x + \beta y}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \beta^n e^{\alpha x + \beta y}.$$

Подставляя эти выраженія z и производныхъ z въ данное уравненіе, мы обратимъ его въ слѣдующее.

$$e^{\alpha x + \beta y}[a + b\alpha + b_1\beta + c\alpha^2 + c_1\alpha\beta + c_2\beta^2 + \ldots + p\alpha^n + p_1\alpha^{n-1}\beta + \ldots + p_n\beta^n] = 0.$$

Отсюда видимъ, что функція $e^{\alpha x + \beta y}$ удовлетворитъ данному уравненію, когда α и β будутъ корнями уравненія:

$$a + b\alpha + b_1\beta + c\alpha^2 + c_1\alpha\beta + c_2\beta^2 + \ldots + p\alpha^n + p_1\alpha^{n-1}\beta + \ldots + p_n\beta^n = 0.$$

Пусть эти корни: α_1 и β_1, α_2 и β_2, α_3 и β_3, . . . (ихъ безчисленное множество), а C_1, C_2, C_3, . . . постоянныя произвольныя; тогда интегралъ даннаго уравненія будетъ:

$$z = C_1 e^{\alpha_1 x + \beta_1 y} + C_2 e^{\alpha_2 x + \beta_2 y} + C_3 e^{\alpha_3 x + \beta_3 y} + \ldots\ldots$$

Напишемъ короче:

$$z = \Sigma\, C e^{\alpha x + \beta y}.$$

Примѣры:

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$; ($n^0$ 576)

$$\alpha\beta - \alpha = 0, \text{ или: } \alpha(\beta - 1) = 0 \quad \begin{cases} \alpha = 0, \ \beta \text{ произвольно}, \\ \beta = 1, \ \alpha \text{ произвольно}. \end{cases}$$

$$z = \Sigma\, C e^{\beta y} + \Sigma\, c e^{\alpha x + y} = \Sigma\, C e^{\beta y} + e^y \Sigma\, c e^{\alpha x}$$

$$= C_1 e^{\beta_1 y} + C_2 e^{\beta_2 y} + C_3 e^{\beta_3 y} + \ldots + e^y\left(c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots\right).$$

C_1, C_2, . . . , c_1, c_2, . . . , α_1, α_2, . . . , β_1, β_2, . . . — числа постоянныя, но произвольныя; по этому сумма $C_1 e^{\beta_1 y} + C_2 e^{\beta_2 y} + \ldots$ — произвольная функція y, а сумма $c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots$ — произвольная функція x. Обозначая первую чрезъ $\xi(y)$, вторую чрезъ $\theta(x)$, имѣемъ:

$$z = \xi(y) + e^y \theta(x).$$

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

$\alpha^2 - k^2 \beta^2 = 0$; $\alpha = \pm k\beta$, β произвольно;

$$z = \Sigma C e^{\pm k\beta x + \beta y} = \Sigma C e^{\beta(y \pm kx)},$$

$$z = \Sigma C' e^{\beta'(y+kx)} + \Sigma C'' e^{\beta''(y-kx)} =$$

$$= C_1' e^{\beta_1'(y+kx)} + C_2' e^{\beta_2'(y+kx)} + \ldots + C_1'' e^{\beta_1''(y-kx)} + C_2'' e^{\beta_2''(y-kx)} + \ldots$$

$C_1', C_2', \ldots, \beta_1', \beta_2', \ldots, C_1'', C_2'', \ldots, \beta_1'', \beta_2'', \ldots$ — постоянныя произвольныя; по этому суммы $\Sigma C' e^{\beta'(y+kx)}$ и $\Sigma C'' e^{\beta''(y-kx)}$ произвольныя функціи двучленовъ: $y+kx$ и $y-kx$. Обозначая первую чрезъ φ, вторую чрезъ ψ, имѣемъ:

$$z = \varphi(y+kx) + \psi(y-kx).$$

Результатъ этотъ можно получить преобразовывая данное уравненіе въ другое введеніемъ новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ. Пусть связь прежнихъ перемѣнныхъ x и y съ новыми a и b выражается уравненіями:

$$y + kx = a, \quad y - kx = b;$$

тогда данное уравненіе обратится въ слѣдующее:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial a \, \partial b} = 0 \text{ *)}, \quad \text{откуда:}$$

$$z = \varphi(a) + \psi(b) \quad (\varphi \text{ и } \psi \text{ произвольныя функціи}),$$

или, внося прежнія перемѣнныя:

$$z = \varphi(y + kx) + \psi(y - kx).$$

Нелинейныя уравненія.

580. Изъ нелинейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ приведемъ одинъ примѣръ. Проинтегрируемъ *уравненіе втораго порядка:*

---

*) Самое преобразованіе было сдѣлано въ примѣрѣ b n° 119, тамъ независимыя перемѣнныя были t и x, зависимая u, а здѣсь независимыя x и y, зависимая z.

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$ (уравненіе развертывающихся поверхностей (n^0 245).)

Обозначая частныя производныя z перваго порядка чрезъ p и q $\left(\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q\right)$, имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial q}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x},$$

— и потому уравненію (1) можно дать видъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}=0.$$

Отсюда заключаемъ, что функціи p и q (такъ какъ ихъ дифференціальный опредѣлитель равенъ 0) зависимы (n^0 119); другими словами: послѣднее уравненіе даетъ:

$$(2)\qquad q=\xi(p).$$ (ξ функція произвольная).

Дифференцируя (2) по x, получимъ:

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\xi'(p)\frac{\partial p}{\partial x},$$ или:

$$(3)\qquad \xi'(p)\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=0$$ $\left(\text{такъ какъ: } \frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}\right)$.

Это — уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка, и при томъ линейное относительно производныхъ. Чтобы проинтегрировать его, составляемъ систему:

$$\frac{dx}{\xi'(p)}=\frac{dy}{-1}=\frac{dp}{0}.$$

Полные интегралы этой системы:

$$\left\{\begin{array}{c} p=C_1 \\ x+y\xi'(C_1)=C_2 \end{array}\right\} \text{ или: } \left\{\begin{array}{c} p=C_1 \\ x+y\xi'(p)=C_2 \end{array}\right\};$$

стало-быть общій интегралъ уравненія (3) будетъ:

$$(4)\qquad x+y\xi'(p)=\psi(p).$$ (ψ функція произвольная)

Представимъ уравненіе $dz=pdx+qdy$ подъ видомъ:

$$d(z-xp-yq)+xdp+ydq=0$$

и замѣнимъ q и dq выраженіями: $\xi(p)$ и $\xi'(p)dp$; получимъ:

$$d[z - xp - y\xi(p)] + [x + y\xi'(p)]dp = 0,$$

или, опираясь на (4):

$$d[z - xp - y\xi(p)] + \psi(p)\,dp = 0;$$

а отсюда:

$$z - xp - y\xi(p) = -\int\psi(p)\,dp.$$

Вторая часть этого уравненія—произвольная функція p. Обозначая ее чрезъ $\theta(p)$, имѣемъ:

$$z = xp + y\xi(p) + \theta(p).$$

Присоединимъ сюда уравненіе (4), въ которомъ $\psi(p)$ можно замѣнить чрезъ $-\theta'(p)$; тогда получимъ совокупность:

$$\left.\begin{array}{lr} (5) & z = xp + y\xi(p) + \theta(p) \\ (6) & x + y\xi'(p) + \theta'(p) = 0 \end{array}\right\},$$

исключеніе изъ которой количества p и доставитъ интегралъ уравненія (1). Интегралъ этотъ заключаетъ въ себѣ двѣ произвольныя функціи.

Такъ какъ (5) (первой степени относительно x, y и z) можно разсматривать, какъ уравненіе движущейся плоскости, перемѣщеніе которой происходитъ вмѣстѣ съ измѣненіемъ параметра p, а (6) получается изъ (5) дифференцированіемъ по параметру p, то, опираясь на n° 249, заключаемъ, что послѣдній интегралъ соотвѣтствуетъ поверхности, обертывающей систему плоскостей (5). Стало-быть развертывающуюся поверхность можно разсматривать, какъ обертывающую положенія движущейся плоскости.

— —

ПРИБАВЛЕНІЯ.

Формула Стирлинга.

581. Въ n° 378 (формула Валлиса) имѣли:

$$\frac{\pi}{2}=\left[\frac{2.4.6.8\,..\,2n}{1.3.5.7\,....\,(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+\theta}\quad\begin{pmatrix}\theta>0\\ <1\end{pmatrix}.$$

Отсюда, помножая числитель и знаменатель на $(2.4.6.8....2n)^2$, находимъ:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{(2.4.6.8....2n)^4}{[1.2.3.4....(2n-1)\,2n]^2}\cdot\frac{1}{2n+\theta}=\frac{2^{4n}[1.2.3...(n-1)\,n]^4}{[1.2.3...(2n-1)\,2n]^2}\cdot\frac{1}{2n+\theta}.$$

Обозначимъ дробь $\dfrac{1.2.3..n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}}$ чрезъ $\varphi(n)$; тогда:

$$(a)\qquad 1.2.3...n=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}\cdot\varphi(n),$$

$$1.2.3...2n=\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4n\pi}\cdot\varphi(2n);$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2^{4n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}\cdot 4n^2\pi^2\cdot(\varphi(n))^4}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}\cdot 4n\pi\cdot(\varphi(2n))^2}\cdot\frac{1}{2n+\theta}=\frac{n\pi\,(\varphi(n))^4}{(\varphi(2n))^2}\cdot\frac{1}{2n+\theta},$$

$$\frac{(\varphi(n))^4}{(\varphi(2n))^2}=\frac{2n+\theta}{2n}=1+\frac{\theta}{2n},\ \text{пред.}\ \frac{(\varphi(n))^4}{(\varphi(2n))^2}=1,$$

$$(b)\qquad \text{пред.}\ \frac{(\varphi(n))^2}{\varphi(2n)}=1.$$

Докажемъ, что $\varphi(n)$ съ возрастаніемъ n уменьшается, и, уменьшаясь, подходитъ къ единицѣ:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}=\frac{1.2.3\ldots n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}}:\frac{1.2.3\ldots n(n+1)}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\sqrt{2(n+1)\pi}}=$$

$$=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$l\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}=-1+\left(n+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=-1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}+\frac{(-1)^k}{(k+1)n^{k+1}}+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{12n^3}+\frac{3}{40n^4}-\ldots+\frac{(-1)^k(k-1)}{2k(k+1)n^k}+\ldots.$$

Послѣдняя строка — знакоперемѣнная, и члены ея по абсолютной величинѣ идутъ уменьшаясь, подходя къ 0 *); слѣдовательно:

$$l\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}>0 \qquad\qquad \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}>1$$

$$<\frac{1}{12n^2}, \qquad\qquad <e^{\frac{1}{12n^2}}.$$

Неравенство $\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}>1$ показываетъ между прочимъ, что $\varphi(n)$ уменьшается съ возрастаніемъ n.

Перемножая неравенства:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}<e^{\frac{1}{12n^2}},\quad \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)}<e^{\frac{1}{12(n+1)^2}},\ \ldots,\ \frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)}<e^{\frac{1}{12(2n-1)^2}},$$

получимъ:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}<e^{\frac{1}{12}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right]},$$

---

*) Отношеніе k-го члена къ $(k-1)$-му отрицательное и по абсолютной величинѣ менѣе $\frac{1}{n}$ (при $k>2$):

$$\frac{(-1)^{k+1}k}{2(k+1)(k+2)n^{k+1}}:\frac{(-1)^k(k-1)}{2k(k+1)n^k}=-\frac{k^2}{(k+2)(k-1)}\cdot\frac{1}{n}=-\frac{k^2}{k^2+k-2}\cdot\frac{1}{n}.$$

откуда тѣмъ болѣе: $\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} < e^{\frac{1}{12n}}$.

Сверхъ того: $\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} > 1$; слѣдовательно:

$$\text{пред.}\ \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1. \tag{c}$$

Опираясь теперь на (b) и (c), находимъ:

$$\text{пред.}\ \varphi(n) = \text{пред.}\ \left[\frac{(\varphi(n))^2}{\varphi(2n)} : \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}\right] = 1.$$

И такъ $\varphi(n)$ съ возрастаніемъ n стремится къ 1-цѣ. При этомъ $\varphi(n)$, какъ видѣли, уменьшается, и потому:

$$\varphi(n) > 1.$$

Найдемъ теперь высшій предѣлъ для $\varphi(n)$; тогда будемъ имѣть двѣ границы, въ которыхъ заключается произведеніе: $1 . 2 . 3 . 4 \ldots n$. Введемъ въ разложеніе $l\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}$ множитель $n+1$; получимъ:

$$(n+1)\,l\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = (n+1)\left[\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n^3} + \frac{3}{40n^4} - \ldots + \frac{(-1)^k(k-1)}{2k(k+1)n^k} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{12n} - \frac{1}{120n^3} + \ldots + \frac{(-1)^k(k-2)}{2k(k+1)(k+2)n^k} + \ldots$$

Въ этой строкѣ отношеніе $(k+1)$-го члена къ k-му $=$

$$\frac{(-1)^{k+1}(k-1)}{2(k+1)(k+2)(k+3)n^{k+1}} : \frac{(-1)^k(k-2)}{2k(k+1)(k+2)n^k} = -\frac{(k-1)k}{(k-2)(k+3)} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= -\frac{k^2-k}{k^2+k-6} \cdot \frac{1}{n} = -\frac{k^2-k}{k^2-k+2(k-3)} \cdot \frac{1}{n}.$$

Оно при $k > 3$ отрицательное и по абсолютной величинѣ менѣе $\frac{1}{n}$; стало-быть послѣдняя строка—знакоперемѣнная, и члены ея по абсолютной величинѣ уменьшаются, подходя къ 0; слѣдовательно:

$$(n+1)\,l\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \begin{matrix} > 0 \\ < \frac{1}{12n} \end{matrix} \quad \Bigg| \quad l\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \begin{matrix} > 0 \\ < \frac{1}{12n(n+1)}. \end{matrix} \tag{d}$$

Тождество:

$$\varphi(n) = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \cdot \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)} \cdot \frac{\varphi(n+2)}{\varphi(n+3)} \cdots \frac{\varphi(n+m-1)}{\varphi(n+m)} \varphi(n+m)$$

даетъ:

$$l\varphi(n) = l\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} + l\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)} + l\frac{\varphi(n+2)}{\varphi(n+3)} + \ldots + l\frac{\varphi(n+m-1)}{\varphi(n+m)} + l\,\varphi(n+m),$$

откуда:

$$l\varphi(n) - l\varphi(n+m) = \sum_{k=1}^{k=m} l\frac{\varphi(n+k-1)}{\varphi(n+k)}.$$

Увеличивая m и переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$l\varphi(n) = \text{пред.} \sum_{k=1}^{k=m} l\frac{\varphi(n+k-1)}{\varphi(n+k)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} l\frac{\varphi(n+k-1)}{\varphi(n+k)} \quad *);$$

а опираясь на неравенство ($д$), имѣемъ:

$$l\frac{\varphi(n+k-1)}{\varphi(n+k)} < \frac{1}{12(n+k-1)(n+k)}$$

$$< \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right).$$

Слѣдовательно:

$$\sum_{k=1}^{k=m} l\frac{\varphi(n+k-1)}{\varphi(n+k)} < \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)$$

$$< \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} l\frac{\varphi(n+k-1)}{\varphi(n+k)} < \frac{1}{12n}, \quad \text{или:} \quad l\varphi(n) < \frac{1}{12n},$$

откуда:

$$\varphi(n) < e^{\frac{1}{12n}}.$$

---

*) Предѣлъ $l\varphi(n+m)$ есть 0, — потому что $\varphi(n+m)$ стремится къ 1 съ возрастаніемъ m.

Подставляя въ (a) на мѣсто $\varphi(n)$ единицу и затѣмъ $e^{\frac{1}{12n}}$, получимъ двѣ границы, въ которыхъ заключается произведеніе $1 . 2 . 3 \ldots n$; а изъ нихъ найдемъ и границы Неперова логариѳма произведенія:

$$1 . 2 . 3 \ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

$$< \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \cdot e^{\frac{1}{12n}},$$

$$l(1 . 2 . 3 \ldots n) > n(ln - 1) + \frac{ln + l(2\pi)}{2}$$

$$< n(ln - 1) + \frac{ln + l(2\pi)}{2} + \frac{1}{12n}.$$

Два признака сходимости строкъ.

582. Признакъ Коши. Пусть на всемъ протяженіи x, превышающаго положительное цѣлое число a, функція $f(x)$ съ возрастаніемъ x, принимая значенія положительныя, уменьшается.

Разсмотримъ строку съ общимъ членомъ $f(n)$; она — знакопостоянная и убывающая.

Интегралъ $\int_m^{m+1} f(x)\,dx$, въ которомъ разность между предѣлами интегрированія равна 1, можно представить значеніемъ $f(x)$ для x средняго между m и $m+1$ (nº 379):

$$\int_m^{m+1} f(x)\,dx = f(m+\theta) \qquad \left(\theta \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}\right);$$

а такъ какъ функція $f(x)$, по условію, уменьшается съ возрастаніемъ x, то, считая m не менѣе a, имѣемъ:

$$f(m) > f(m+\theta) > f(m+1),$$

или:

$$f(m) > \int_m^{m+1} f(x)\,dx > f(m+1).$$

Подставляя въ этомъ неравенствѣ на мѣсто m послѣдовательно $a, a+1, a+2, \ldots, a+k-1$, получимъ неравенства:

$$f(a) > \int_a^{a+1} f(x)\,dx > f(a+1)$$

$$f(a+1) > \int_{a+1}^{a+2} f(x)\,dx > f(a+2)$$

$$f(a+2) > \int_{a+2}^{a+3} f(x)\,dx > f(a+3)$$

. . . .

. . . .

$$f(a+k-1) > \int_{a+k-1}^{a+k} f(x)\,dx > f(a+k),$$

сложеніе которыхъ даетъ:

$$\sum_a^{a+k-1} f(m) > \int_a^{a+k} f(x)\,dx > \sum_{a+1}^{a+k} f(m).$$

Увеличивая k безгранично, и переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$\sum_a^{\infty} f(m) > \int_a^{\infty} f(x)\,dx > \sum_{a+1}^{\infty} f(m).$$

Неравенства эти показываютъ, что интегралъ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ имѣетъ конечную или безконечную величину, смотря потому, сходящаяся или расходящаяся разсматриваемая строка, и наоборотъ: послѣдняя строка будетъ сходящеюся или расходящеюся, смотря потому, имѣетъ-ли интегралъ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ конечное или безконечно-большое значеніе.

И такъ имѣемъ слѣдующее правило для узнанія сходимости или расходимости знакопостоянной убывающей строки съ общимъ членомъ $f(n)$: *если интегралъ* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ — *величина конечная, строка сходящаяся; если онъ безконечный,—расходящаяся.*

Примѣры:

a) Строка: $\frac{1}{1^\alpha}, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}, \ldots$ сходящаяся, когда $\alpha > 1$, и расходящаяся, когда $\alpha \leqq 1$, — потому что интегралъ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ представляетъ величину конечную, именно $\frac{1}{\alpha-1}$, а при $\alpha = 1$ и при $\alpha < 1$ онъ безконечно великъ.

b) Строка: $\frac{1}{2(l2)^\alpha}, \frac{1}{3(l3)^\alpha}, \frac{1}{4(l4)^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n(ln)^\alpha}, \ldots$ сходящаяся, когда $\alpha > 1$, и расходящаяся, когда $\alpha \leqq 1$, — потому что интегралъ $\int_2^\infty \frac{dx}{x(lx)^\alpha}$ равенъ конечной величинѣ, а именно $\frac{1}{(\alpha-1)(l2)^{\alpha-1}}$, при $\alpha > 1$, и безконечности при $\alpha < 1$ и при $\alpha = 1$.

583. Признакъ Ермакова. Онъ относится также къ строкамъ знакопостояннымъ убывающимъ. Пусть $f(n)$ общій членъ строки. Функція $f(n)$, при всякомъ n, превышающемъ нѣкоторое положительное число, удовлетворяетъ условіямъ: $f(n) > 0$, $f(n) > f(n+1)$. Возьмемъ функцію $\varphi(x)$, растущую вмѣстѣ съ x и удовлетворяющую неравенству: $\varphi(x) > x$. *Если отношеніе* $\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)}$, *съ возрастаніемъ* x, *стремится къ величинѣ, меньшей единицы, строка*: $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a+2), \ldots, f(n), \ldots$ *сходящаяся; если же оно стремится къ величинѣ, большей единицы, — расходящаяся.* Для доказательства, предполагая сначала, что предѣлъ отношенія $\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)}$ менѣе единицы, возьмемъ между этимъ предѣломъ и единицею опредѣленное число α; тогда при всякомъ значеніи x, превышающемъ достаточно большое число a, будемъ имѣть неравенство:

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} < \alpha, \quad (\alpha < 1)$$

изъ котораго:

$$\varphi'(x) f(\varphi(x)) < \alpha f(x), \int_a^\infty \varphi'(x) f(\varphi(x))\, dx < \alpha \int_a^\infty f(x)\, dx.$$

Полагая $\varphi(x) = z$, откуда: $\varphi'(x)\, dx = dz$, и имѣя въ виду, что, при безграничномъ возрастаніи x, растетъ безгранично и $\varphi(x)$, — находимъ:

$$\int_a^\infty \varphi'(x) f(\varphi(x))\, dx = \int_{\varphi(a)}^\infty f(z)\, dz = \int_{\varphi(a)}^\infty f(x)\, dx;$$

и потому:

$$\int_{\varphi(a)}^\infty f(x)\, dx < \alpha \int_a^\infty f(x)\, dx.$$

Прибавляя къ объимъ частямъ этого неравенства по интегралу $\int_a^{\varphi(a)} f(x)\, dx$, получимъ:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx < \int_a^{\varphi(a)} f(x)\, dx + \alpha \int_a^\infty f(x)\, dx,$$

откуда:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx < \frac{\int_a^{\varphi(a)} f(x)\, dx}{1-\alpha}.$$

Такъ какъ α опредѣленное положительное число, меньшее 1-цы, и предѣлы интеграла $\int_a^{\varphi(a)} f(x)\, dx$ конечные, то отношеніе $\frac{\int_a^{\varphi(a)} f(x)\, dx}{1-\alpha}$ — число конечное; а по этому и интегралъ $\int_a^\infty f(x)\, dx$, какъ видно изъ послѣдняго неравенства, — величина конечная. Слѣдовательно, опираясь на теорему Коши, заключаемъ, что, при сдѣланномъ допущеніи, разсматриваемая строка сходящаяся.

Пусть теперь предѣлъ отношенія $\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)}$ болѣе единицы; тогда при всякомъ значеніи x, превышающемъ достаточно большое число a, будемъ имѣть:

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} > 1, \quad \varphi'(x) f(\varphi(x)) > f(x),$$

и по этому:

$$\int_a^\infty \varphi'(x) f(\varphi(x))\, dx > \int_a^\infty f(x)\, dx, \text{ или: } \int_{\varphi(a)}^\infty f(x)\, dx > \int_a^\infty f(x)\, dx;$$

а отсюда:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx > \int_a^{\varphi(a)} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

Неравенство это невозможно при конечномъ значеніи интеграла $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$; по этому: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \infty$, и стало-быть, по теоремѣ Коши, строка-расходящаяся.

Сходимость или расходимость строки останется подъ сомнѣніемъ, когда отношеніе $\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}$, меньшее единицы, стремится къ единицѣ. Если же отношеніе это болѣе единицы и стремится къ единицѣ, строка — расходящаяся.

Разнообразя растущую вмѣстѣ съ x функцію $\varphi(x)$, удовлетворяющую условію $\varphi(x) > x$, можно составить множество правилъ для рѣшенія вопроса о сходимости или расходимости строки. Такъ, при $\varphi(x) = x + 1$, получимъ правило Даламбера; при $\varphi(x) = x^2$, о сходимости или расходимости строки узнаемъ по предѣлу отношенія $\frac{2xf(x^2)}{f(x)}$; при $\varphi(x) = e^x$, — по предѣлу отношенія $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}$, и проч.

Употребляя послѣднее отношеніе, мы почти всегда рѣшимъ вопросъ. Отношеніе это составимъ изъ общаго члена $f(n)$ строки, подставляя e^x и x на мѣсто n, раздѣляя первый результатъ на второй и умножая частное на e^x.

Примѣры:

a) Строка, съ общимъ членомъ $\frac{1}{nln(lln)^{\alpha}}$, — сходящаяся при $\alpha > 1$ и расходящаяся при $\alpha \leq 1$, — потому что когда $f(x) = \frac{1}{xlx(llx)^{\alpha}}$, отношеніе $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}$ обращается въ $\frac{(llx)^{\alpha}}{(lx)^{\alpha-1}}$, а это послѣднее съ возрастаніемъ x стремится къ 0 при $\alpha > 1$, и растетъ безгранично, при $\alpha \leq 1$.

b) Строка, общій членъ которой $\frac{1}{n(lln)^{\alpha}}$, — расходящаяся при всякомъ α, — потому что для этой строки отношеніе $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}$, обращаясь въ $x\left(\frac{llx}{lx}\right)^{\alpha}$, растетъ безгранично вмѣстѣ съ x при всякомъ α.

Рядъ Лагранжа.

584. Пусть z — функція перемѣнныхъ независимыхъ x и h, заданная уравненіемъ:

$$(a)\qquad z = x + h\varphi(z).$$

Требуется развернуть въ строку функцію $f(z)$ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ h.

Представимъ разность $f(z) - f(x)$ интеграломъ $\int_x^z f'(u)\,du$, а этотъ интегралъ будемъ разсматривать, какъ частный случай интеграла $\int_x^z [x + h\varphi(u) - u]^n f'(u)\,du$. Обозначая послѣдній чрезъ S_n, имѣемъ:

$$(b)\qquad S_n = \int_x^z \left[x + h\varphi(u) - u\right]^n f'(u)\,du,$$

$$S_0 = \int_x^z f'(u)\,du = f(z) - f(x),$$

$$(c)\qquad f(z) = f(x) + S_0.$$

Дифференцируя (b) по x, опираясь на правило n⁰ 445, и замѣчая при этомъ, что трехчленъ $x + h\varphi(u) - u$ обращается въ 0 при $u = z$, и въ $h\varphi(x)$ при $u = x$, получимъ:

$$\frac{\partial S_n}{\partial x} = n\int_x^z \left[x + h\varphi(u) - u\right]^{n-1} f'(u)\,du - h^n(\varphi(x))^n f'(x) =$$

$$= nS_{n-1} - h^n(\varphi(x))^n f'(x);$$

а отсюда:

$$(d)\qquad S_{n-1} = \frac{h^n}{n}(\varphi(x))^n f'(x) + \frac{1}{n}\frac{\partial S_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^{n-1} S_{n-1}}{\partial x^{n-1}} = \frac{h^n}{n}\cdot\frac{\partial^{n-1}[(\varphi(x))^n f'(x)]}{\partial x^{n-1}} + \frac{1}{n}\frac{\partial^n S_n}{\partial x^n},$$

$$(e)\qquad \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{\partial^{n-1} S_{n-1}}{\partial x^{n-1}} = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\partial^{n-1}[(\varphi(x))^n f'(x)]}{\partial x^{n-1}} + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{\partial^n S_n}{\partial x^n}.$$

Подставляя въ ($д$) на мѣсто n единицу, а въ ($е$) послѣдовательно: 2, 3, 4, ... , получимъ:

$$S_0 = h\,\varphi(x)\,f'(x) + \frac{\partial S_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{\partial\left[(\varphi(x))^2 f'(x)\right]}{\partial x} + \frac{1}{1.2}\frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2},$$

$$\frac{1}{1.2}\frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} = \frac{h^3}{1.2.3}\frac{\partial^2\left[(\varphi(x))^3 f'(x)\right]}{\partial x^2} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3 S_3}{\partial x^3},$$

$$\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3 S_3}{\partial x^3} = \frac{h^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3\left[(\varphi(x))^4 f'(x)\right]}{\partial x^3} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{\partial^4 S_4}{\partial x^4}, \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно:

$$f(z) = f(x) + h\,\varphi(x)\,f'(x) + \frac{h^2}{1.2}\frac{\partial\left[(\varphi(x))^2 f'(x)\right]}{\partial x} + \frac{h^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^2\left[(\varphi(x))^3 f'(x)\right]}{\partial x^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\partial^{n-1}\left[(\varphi(x))^n f'(x)\right]}{\partial x^{n-1}} + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{\partial^n S_n}{\partial x^n}.$$

Остаточный членъ въ этомъ разложенiи =

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\partial^n \int_x^z [x + h\varphi(u) - u]^n f'(u)\,du}{\partial x^n};$$

если онъ стремится къ 0 съ возрастанiемъ n, то:

$$f(z) = f(x) + h\varphi(x)f'(x) + \frac{h^2}{1.2}\left[(\varphi(x))^2 f'(x)\right]' + \frac{h^3}{1.2.3}\left[(\varphi(x))^3 f'(x)\right]'' + \ldots$$

Полагая $f(z) = z$, и стало-быть: $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, находимъ:

$$z = x + h\,\varphi(x) + \frac{h^2}{1.2}\left[(\varphi(x))^2\right]' + \frac{h^3}{1.2.3}\left[(\varphi(x))^3\right]'' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\left[(\varphi(x))^n\right]^{(n-1)} + r_n,$$

гдѣ:

$$r_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\partial^n \int_x^z [x + h\varphi(u) - u]^n\,du}{\partial x^n}.$$

Если r_n стремится къ 0, то:

$$z = x + h\varphi(x) + \frac{h^2}{1.2}\left[(\varphi(x))^2\right]' + \frac{h^3}{1.2.3}\left[(\varphi(x))^3\right]'' + \ldots$$

585. Сдѣлаемъ въ (a): $\varphi(z) = 1$; тогда: $z = x + h$, и разложеніе $f(z)$ дастъ извѣстную формулу Тайлора:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{\partial^n \int_x^{x+h} (x+h-u)^n f'(u)\,du}{\partial x^n};$$

но съ другимъ остаточнымъ членомъ, отличнымъ по формѣ отъ того, который приведенъ былъ въ n° 380. Чтобы привести его къ прежней формѣ, преобразуемъ интегралъ

$$\int_x^{x+h} (x+h-u)^n f'(u)\,du\,;$$

положимъ: $x + h - u = t$; тогда: $u = x + h - t$, $du = -dt$; и потому:

$$\int_x^{x+h} (x+h-u)^n f'(u)\,du = \int_0^h t^n f'(x+h-t)\,dt.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{\partial^n \int_x^{x+h} (x+h-u)^n f'(u)\,du}{\partial x^n} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{\partial^n \int_0^h t^n f'(x+h-t)\,dt}{\partial x^n} =$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots n} \int_0^h t^n f^{(n+1)}(x+h-t)\,dt.$$

Формулы квадратуръ.

586. Формула Эйлера (*съ остаточнымъ членомъ Остроградскаго*). Разложимъ интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$, какъ и въ n° 381, на n интеграловъ, въ предѣлахъ: a и a_1, a_1 и a_2, a_2 и a_3, ..., a_{n-1} и b, предполагая при этомъ, что $b > a$, и что числа a, a_1, a_2, ..., a_{n-1} и b идутъ въ ариѳметической прогрессіи, разность которой обозначимъ чрезъ ω.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)dx + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx;$$

$$a_1 - a = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = b - a_{n-1} = \omega = \frac{b-a}{n}.$$

Пусть $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$; тогда:

$$\int_a^{a_1} f(x)dx = \varphi(a_1) - \varphi(a) = \varphi(a+\omega) - \varphi(a) =$$

$$= \omega\varphi'(a) + \frac{\omega^2}{1.2}\varphi''(a) + \frac{\omega^3}{1.2.3}\varphi'''(a) + \frac{\omega^4}{1.2.3.4}\varphi^{(4)}(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\omega^{2k}}{1.2\ldots 2k}\varphi^{(2k)}(a) + \int_0^\omega \frac{t^{2k}}{1.2\ldots 2k}\varphi^{(2k+1)}(a+\omega-t)\,dt,$$

или, такъ какъ: $\varphi'(x) = f(x)$, $\varphi''(x) = f'(x)$, ...:

$$(1)\quad \int_a^{a_1} f(x)dx = \omega f(a) + \frac{\omega^2}{1.2}f'(a) + \frac{\omega^3}{1.2.3}f''(a) + \frac{\omega^4}{1.2.3.4}f'''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\omega^{2k}}{1.2\ldots 2k}f^{(2k-1)}(a) + \int_0^\omega \frac{t^{2k}}{1.2\ldots 2k}f^{(2k)}(a+\omega-t)\,dt.$$

Разлагая подобнымъ образомъ разности: $f(a_1)-f(a)$, $f'(a_1)-f'(a)$, $f''(a_1)-f''(a)$, ..., $f^{(2k-2)}(a_1)-f^{(2k-2)}(a)$, беря при этомъ въ разложеніяхъ столько членовъ, чтобы въ послѣднихъ членахъ входящая подъ знаками интеграловъ производная была $2k$-го порядка, получимъ:

$$(2)\quad f(a_1) - f(a) = \omega f'(a) + \frac{\omega^2}{1.2}f''(a) + \frac{\omega^3}{1.2.3}f'''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\omega^{2k-1}}{1.2\ldots(2k-1)}f^{(2k-1)}(a) + \int_0^\omega \frac{t^{2k-1}}{1.2\ldots(2k-1)}f^{(2k)}(a+\omega-t)\,dt$$

$$(3)\quad f'(a_1) - f'(a) = \omega f''(a) + \frac{\omega^2}{1.2}f'''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\omega^{2k-2}}{1.2\ldots(2k-2)}f^{(2k-1)}(a) + \int_0^\omega \frac{t^{2k-2}}{1.2\ldots(2k-2)}f^{(2k)}(a+\omega-t)\,dt$$

(4) $f''(a_1) - f''(a) = \omega f'''(a) + \ldots.$

$$\ldots + \frac{\omega^{2k-3}}{1.2\ldots(2k-3)} f^{(2k-1)}(a) + \int_0^\omega \frac{t^{2k-3}}{1.2\ldots(2k-3)} f^{(2k)}(a+\omega-t)\,dt$$

. . . .

. . . .

(2k−1) $f^{(2k-3)}(a_1) - f^{(2k-3)}(a) = \omega f^{(2k-2)}(a) + \frac{\omega^2}{1.2} f^{(2k-1)}(a) +$

$$+ \int_0^\omega \frac{t^2}{1.2} f^{(2k)}(a+\omega-t)\,dt$$

(2k) $f^{(2k-2)}(a_1) - f^{(2k-2)}(a) = \omega f^{(2k-1)}(a) + \int_0^\omega t\, f^{(2k)}(a+\omega-t)\,dt.$

Помножимъ (2) на $A\omega$, (3) на $A_1\omega^2$, (4) на $A_2\omega^3$, ... , $(2k-1)$ на $A_{2k-3}\omega^{2k-2}$ и $(2k)$ на $A_{2k-2}\omega^{2k-1}$ (A, A_1, A_2, ... A_{2k-3} и A_{2k-2} произвольныя числа), и сумму произведеній сложимъ съ (1); получимъ:

(a) $\int_a^{a_1} f(x)dx + A\omega[f(a_1) - f(a)] + A_1\omega^2[f'(a_1) - f'(a)] + A_2\omega^3[f''(a_1) - f''(a)] + \ldots$

$$\ldots + A_{2k-2}\,\omega^{2k-1}[f^{(2k-2)}(a_1) - f^{(2k-2)}(a)] =$$

$$= \omega f(a) + \omega^2 f'(a)\left[\frac{1}{1.2} + A\right] + \omega^3 f''(a)\left[\frac{1}{1.2.3} + \frac{A}{1.2} + A_1\right] +$$

$$+ \omega^4 f'''(a)\left[\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{A}{1.2.3} + \frac{A_1}{1.2} + A_2\right] + \ldots$$

$$\ldots + \omega^{2k} f^{(2k-1)}(a)\left[\frac{1}{1.2.3\ldots 2k} + \frac{A}{1.2\ldots(2k-1)} + \frac{A_1}{1.2\ldots(2k-2)} + \ldots + \frac{A_{2k-3}}{1.2} + A_{2k-2}\right] + R,$$

гдѣ:

$$R = \int_0^\omega \left[\frac{t^{2k}}{1.2.3\ldots 2k} + \frac{A\omega t^{2k-1}}{1.2\ldots(2k-1)} + \frac{A_1\omega^2 t^{2k-2}}{1.2\ldots(2k-2)} + \ldots + \frac{A_{2k-3}\omega^{2k-2}t^2}{1.2} + A_{2k-2}\,\omega^{2k-1} t\right] f^{(2k)}(a+\omega-t)\,dt.$$

Подчинимъ A, A_1, A_2, A_3, . . ., A_{2k-3}, A_{2k-2} условіямъ:

$$\frac{1}{1.2} + A = 0$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{A}{1.2} + A_1 = 0$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{A}{1.2.3} + \frac{A_1}{1.2} + A_2 = 0$$

(b)

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{A}{1.2.3.4} + \frac{A_1}{1.2.3} + \frac{A_2}{1.2} + A_3 = 0$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 2k} + \frac{A}{1.2\ldots(2k-1)} + \frac{A_1}{1.2\ldots(2k-2)} + \ldots + \frac{A_{2k-3}}{1.2} + A_{2k-2} = 0;$$

вообще:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(s+2)} + \frac{A}{1.2\ldots(s+1)} + \frac{A_1}{1.2\ldots s} + \ldots + \frac{A_{s-2}}{1.2.3} + \frac{A_{s-1}}{1.2} + A_s = 0;$$

тогда:

$$A = -\frac{1}{2},\ A_1 = \frac{1}{12},\ A_2 = 0,\ A_3 = -\frac{1}{720},\ A_4 = 0,$$

$$A_5 = \frac{1}{30240},\ A_6 = 0,\ A_7 = -\frac{1}{1209600},\ A_8 = 0, \text{ и т. д.,}$$

и уравненіе (a) приметъ слѣдующій видъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)dx = \omega\frac{f(a)+f(a_1)}{2} - A_1\omega^2\Big[f'(a_1)-f'(a)\Big] - A_3\omega^4\Big[f'''(a_1)-f'''(a)\Big] - \ldots$$

$$\ldots - A_{2k-3}\,\omega^{2k-2}\Big[f^{(2k-3)}(a_1) - f^{(2k-3)}(a)\Big] + R \quad *).$$

Вычисленные коэффиціенты A_2, A_4, A_6, A_8, оказались нолями. Чтобы доказать вообще, что каждое A съ четнымъ указателемъ равно 0, разсмотримъ цѣлую функцію:

$$\frac{t^{s+2}}{1.2.3\ldots(s+2)} + \frac{At^{s+1}}{1.2\ldots(s+1)} + \frac{A_1 t^s}{1.2\ldots s} + \frac{A_2 t^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)} + \ldots + \frac{A_{s-2}t^3}{1.2.3} + \frac{A_{s-1}t^2}{1.2} + A_s t,$$

---

*) Членъ $-A_{2k-2}\,\omega^{2k-1}\,[f^{(2k-2)}(a_1) - f^{(2k-2)}(a)]$ пропускаемъ,—потому что, какъ сейчасъ увидимъ, $A_{2k-2} = 0$.

въ которой $A, A_1, A_2, \ldots$ удовлетворяютъ уравненіямъ (b). Обозначимъ ее чрезъ T_{s+2} и развернемъ по степенямъ $t-1$.

Производныя T_{s+2}:

$$T'_{s+2}=\frac{t^{s+1}}{1.2\ldots(s+1)}+\frac{At^s}{1.2\ldots s}+\frac{A_1t^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)}+\frac{A_2t^{s-2}}{1.2\ldots(s-2)}+\ldots+\frac{A_{s-2}t^2}{1.2}+A_{s-1}t+A_s,$$

$$T''_{s+2}=\frac{t^s}{1.2\ldots s}+\frac{At^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)}+\frac{A_1t^{s-2}}{1.2\ldots(s-2)}+\frac{A_2t^{s-3}}{1.2\ldots(s-3)}+\ldots+A_{s-2}t+A_{s-1},$$

$$T'''_{s+2}=\frac{t^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)}+\frac{At^{s-2}}{1.2\ldots(s-2)}+\frac{A_1t^{s-3}}{1.2\ldots(s-3)}+\frac{A_2t^{s-4}}{1.2\ldots(s-4)}+\ldots+A_{s-3}t+A_{s-2},$$

. . . .

. . . .

$$T^{(s-1)}_{s+2}=\frac{t^3}{1.2.3}+\frac{At^2}{1.2}+A_1t+A_2,$$

$$T^{(s)}_{s+2}=\frac{t^2}{1.2}+At+A_1,$$

$$T^{(s+1)}_{s+2}=t+A,$$

$$T^{(s+2)}_{s+2}=1;$$

значенія T_{s+2} и производныхъ при $t=1$:

$$\left(T_{s+2}\right)_1=\frac{1}{1.2\ldots(s+2)}+\frac{A}{1.2\ldots(s+1)}+\frac{A_1}{1.2\ldots s}+\frac{A_2}{1.2\ldots(s-1)}+\ldots+\frac{A_{s-2}}{1.2.3}+\frac{A_{s-1}}{1.2}+A_s=0$$

$$\left(T'_{s+2}\right)_1=\frac{1}{1.2\ldots(s+1)}+\frac{A}{1.2\ldots s}+\frac{A_1}{1.2\ldots(s-1)}+\frac{A_2}{1.2\ldots(s-2)}+\ldots+\frac{A_{s-2}}{1.2}+A_{s-1}+A_s=A_s$$

$$\left(T''_{s+2}\right)_1=\frac{1}{1.2\ldots s}+\frac{A}{1.2\ldots(s-1)}+\frac{A_1}{1.2\ldots(s-2)}+\frac{A_2}{1.2\ldots(s-3)}+\ldots+\frac{A_{s-3}}{1.2}+A_{s-2}+A_{s-1}=A_{s-1}$$

$$\left(T'''_{s+2}\right)_1=\frac{1}{1.2\ldots(s-1)}+\frac{A}{1.2\ldots(s-2)}+\frac{A_1}{1.2\ldots(s-3)}+\ldots+\frac{A_{s-4}}{1.2}+A_{s-3}+A_{s-2}=A_{s-2}$$

. . . .

. . . .

$$\left(T^{(s-1)}_{s+2}\right)_1=\frac{1}{1.2.3}+\frac{A}{1.2}+A_1+A_2=A_2$$

$$\left(T_{s+2}^{(s)}\right)_1 = \frac{1}{1.2} + A + A_1 = A_1$$

$$\left(T_{s+2}^{(s+1)}\right)_1 = 1 + A = \frac{1}{2} = -A$$

$$\left(T_{s+2}^{(s+2)}\right)_1 = 1.$$

Разложеніе T_{s+2} по степенямъ $t-1$:

$$T_{s+2} = \left(T_{s+2}\right)_1 + (t-1)\left(T'_{s+2}\right)_1 + \frac{(t-1)^2}{1.2}\left(T''_{s+2}\right)_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(t-1)^s}{1.2..s}\left(T_{s+2}^{(s)}\right)_1 + \frac{(t-1)^{s+1}}{1.2..(s+1)}\left(T_{s+2}^{(s+1)}\right)_1 + \frac{(t-1)^{s+2}}{1.2..(s+2)}\left(T_{s+2}^{(s+2)}\right)_1$$

$$= A_s(t-1) + A_{s-1}\frac{(t-1)^2}{1.2} + A_{s-2}\frac{(t-1)^3}{1.2.3} + \ldots + A_1\frac{(t-1)^s}{1.2\ldots s} - A\frac{(t-1)^{s+1}}{1.2\ldots(s+1)} + \frac{(t-1)^{s+2}}{1.2\ldots(s+2)}.$$

T_{s+2} обращается въ 0 при $t=0$; по этому, дѣлая въ послѣднемъ разложеніи $t=0$, получимъ:

$$-A_s + \frac{A_{s-1}}{1.2} - \frac{A_{s-2}}{1.2.3} + \ldots + \frac{(-1)^s A_1}{1.2\ldots s} - \frac{(-1)^{s+1}A}{1.2\ldots(s+1)} + \frac{(-1)^{s+2}}{1.2\ldots(s+2)} = 0.$$

Пусть s четное число. Поставляя это на видъ, напишемъ $2m$ вмѣсто s; тогда:

$$-A_{2m} + \frac{A_{2m-1}}{1.2} - \frac{A_{2m-2}}{1.2.3} + \ldots + \frac{A_1}{1.2\ldots 2m} + \frac{A}{1.2\ldots(2m+1)} + \frac{1}{1.2\ldots(2m+2)} = 0\,;$$

а вычитая послѣднее равенство изъ:

$$A_{2m} + \frac{A_{2m-1}}{1.2} + \frac{A_{2m-2}}{1.2.3} + \ldots + \frac{A_1}{1.2\ldots 2m} + \frac{A}{1.2\ldots(2m+1)} + \frac{1}{1.2\ldots(2m+2)} = 0\,,$$

и сокращая на 2, получимъ:

$$A_{2m} + \frac{A_{2m-2}}{1.2.3} + \frac{A_{2m-4}}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{A_2}{1.2\ldots(2m-1)} = 0.$$

Это равенство при $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ даетъ:

$$A_2 = 0,$$

$$A_4 + \frac{A_2}{1.2.3} = 0,$$

$$A_6 + \frac{A_4}{1.2.3} + \frac{A_2}{1.2.3.4.5} = 0;$$

$$A_8 + \frac{A_6}{1.2.3} + \frac{A_4}{1.2.3.4.5} + \frac{A_2}{1.2.3.4.5.6.7} = 0, \text{ и т. д.},$$

откуда находимъ: $A_2 = 0$, $A_4 = 0$, $A_6 = 0, \ldots$; вообще каждое A съ четнымъ указателемъ равно 0.

Разсмотримъ теперь остаточный членъ въ разложеніи интеграла $\int_a^{a_1} f(x)\,dx$. Имѣя въ виду, что A съ четными указателями — нули, мы можемъ представить его такъ:

$$R=\int_0^\omega\left[\frac{t^{2k}}{1.2...2k}+\frac{A\omega t^{2k-1}}{1.2...(2k-1)}+\frac{A_1\omega^2 t^{2k-2}}{1.2...(2k-2)}+\frac{A_3\omega^4 t^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+\ldots+\frac{A_{2k-3}\omega^{2k-2}t^2}{1.2}\right]f^{(2k)}(a+\omega-t)\,dt,$$

или:

$$R = \omega^{2k+1}\int_0^1 T_{2k} f^{(2k)}(a+\omega-\omega t)\,dt,$$

гдѣ:

$$T_{2k}=\frac{t^{2k}}{1.2...2k}+\frac{At^{2k-1}}{1.2...(2k-1)}+\frac{A_1 t^{2k-2}}{1.2..(2k-2)}+\frac{A_3 t^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+\ldots+\frac{A_{2k-5}t^4}{1.2.3.4}+\frac{A_{2k-3}t^2}{1.2}.$$

Докажемъ, что на всемъ пути t между 0 и 1 функція T_{2k} сохраняетъ знакъ. Производныя T_{2k}:

$$T_{2k}'=\frac{t^{2k-1}}{1.2...(2k-1)}+\frac{At^{2k-2}}{1.2...(2k-2)}+\frac{A_1 t^{2k-3}}{1.2..(2k-3)}+\frac{A_3 t^{2k-5}}{1.2...(2k-5)}+\ldots+\frac{A_{2k-5}t^3}{1.2.3}+A_{2k-3}t$$

$$T_{2k}''=\frac{t^{2k-2}}{1.2...(2k-2)}+\frac{At^{2k-3}}{1.2...(2k-3)}+\frac{A_1 t^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+\frac{A_3 t^{2k-6}}{1.2...(2k-6)}+\ldots+\frac{A_{2k-3}t^2}{1.2}+A_{2k-3}$$

$$=T_{2k-2}+A_{2k-3}$$

$$T_{2k}'''=\frac{t^{2k-3}}{1.2...(2k-3)}+\frac{At^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+\frac{A_1 t^{2k-5}}{1.2...(2k-5)}+\ldots+A_{2k-5}t$$

$$T_{2k}^{(4)}=\frac{t^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+\frac{At^{2k-5}}{1.2...(2k-5)}+\frac{A_1 t^{2k-6}}{1.2...(2k-6)}+\ldots+A_{2k-5}=T_{2k-4}+A_{2k-5}$$

. . . .

. . . .

$$T_{2k}^{(2k-4)}=\frac{t^4}{1.2.3.4}+\frac{At^3}{1.2.3}+\frac{A_1 t^2}{1.2}+A_3=T_4+A_3$$

$$T_{2k}^{(2k-3)} = \frac{t^3}{1.2.3} + \frac{At^2}{1.2} + A_1 t$$

$$T_{2k}^{(2k-2)} = \frac{t^2}{1.2} + At + A_1$$

$$T_{2k}^{(2k-1)} = t + A$$

$$T_{2k}^{(2k)} = 1.$$

Значенія функціи T_{2k} и ея производныхъ при $t = 0$ и при $t = 1$:

$$\left(T_{2k}\right)_0 = 0,\ \left(T_{2k}\right)_1 = \frac{1}{1.2...2k} + \frac{A}{1.2...(2k-1)} + \frac{A_1}{1.2...(2k-2)} + ... + \frac{A_{2k-3}}{1.2} = 0,$$

$$\left(T_{2k}'\right)_0 = 0,\ \left(T_{2k}'\right)_1 = \frac{1}{1.2...(2k-1)} + \frac{A}{1.2...(2k-2)} + \frac{A_1}{1.2...(2k-3)} + ... + A_{2k-3} = 0,$$

$$\left(T_{2k}''\right)_0 = A_{2k-3},\ \left(T_{2k}''\right)_1 = \left(T_{2k-2}\right)_1 + A_{2k-3} = A_{2k-3},$$

$$\left(T_{2k}'''\right)_0 = 0, \left(T_{2k}'''\right)_1 = \frac{1}{1.2...(2k-3)} + \frac{A}{1.2...(2k-4)} + \frac{A_1}{1.2...(2k-5)} + ... + A_{2k-5} = 0,$$

$$\left(T_{2k}^{(4)}\right)_0 = A_{2k-5},\ \left(T_{2k}^{(4)}\right)_1 = \left(T_{2k-4}\right)_1 + A_{2k-5} = A_{2k-5},$$

. . . .

. . . .

$$\left(T_{2k}^{(2k-4)}\right)_0 = A_3,\ \left(T_{2k}^{(2k-4)}\right)_1 = (T_4)_1 + A_3 = A_3,$$

$$\left(T_{2k}^{(2k-3)}\right)_0 = 0,\ \left(T_{2k}^{(2k-3)}\right)_1 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{A}{1.2} + A_1 = 0,$$

$$\left(T_{2k}^{(2k-2)}\right)_0 = A_1,\ \left(T_{2k}^{(2k-2)}\right)_1 = \frac{1}{1.2} + A + A_1 = A_1$$

$$\left(T_{2k}^{(2k-1)}\right)_0 = A = -\frac{1}{2},\ \left(T_{2k}^{(2k-1)}\right)_1 = 1 + A = +\frac{1}{2}$$

$$\left(T_{2k}^{(2k)}\right)_0 = 1, \qquad \left(T_{2k}^{(2k)}\right)_1 = 1.$$

Видимъ, что эти значенія при $t = 0$ таковы же, какъ и при $t = 1$, исключая значеній функціи $T_{2k}^{(2k-1)}$, которая даетъ $-\frac{1}{2}$ при $t = 0$, и $+\frac{1}{2}$ при $t = 1$;

при $t = 0$: $0, 0, A_{2k-3}, 0, A_{2k-5}, 0, \ldots, 0, A_3, 0, A_1, -\frac{1}{2}, 1$;

при $t = 1$: $0, 0, A_{2k-3}, 0, A_{2k-5}, 0, \ldots, 0, A_3, 0, A_1, +\frac{1}{2}, 1$.

Вычисленныя количества A_1, A_3, A_5 и A_7 показываютъ, что: $A_1 > 0$, $A_3 < 0$, $A_5 > 0$, $A_7 < 0$; спрашивается: идетъ-ли это чередованіе знаковъ и далѣе, т. е. будетъ-ли рядъ:

$$A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{2k-5}, A_{2k-3}$$

знакоперемѣннымъ на всемъ пути отъ A_1 до A_{2k-3}, и сверхъ того, не обращаются-ли нѣкоторые изъ членовъ этого ряда въ 0? Допуская, что ни одинъ изъ членовъ не уничтожается, и что знаки ихъ идутъ чередуясь, и опираясь на извѣстное свойство функціи имѣть послѣ ея уничтоженія знакъ одинаковый съ знакомъ ея производной, а до уничтоженія — обратный — для функцій T_{2k}, T_{2k}', T_{2k}'', T_{2k}''', ..., $T_{2k}^{(2k)}$, при $t = 0$, при $t = \varepsilon$, при $t = 1 - \varepsilon$ и при $t = 1$ (ε безконечно — малая положит. величина), находимъ:

	T_{2k}	T'_{2k}	T''_{2k}	T'''_{2k}	$T^{(4)}_{2k}$ ...	$T_{2k}^{(2k-4)}$	$T_{2k}^{(2k-3)}$	$T_{2k}^{(2k-2)}$	$T_{2k}^{(2k-1)}$	$T_{2k}^{(2k)}$
0)	0	0	+	0	— ...	—	0	+	—	+
ε)	+	+	+	—	— ...	—	+	+	—	+
1—ε)	+	—	+	+	— ...	—	—	+	+	+
1)	0	0	+	0	— ...	—	0	+	+	+;

это — при k четномъ; а при k нечетномъ:

0)	0	0	—	0	+	—	0	+	—	+
ε)	—	—	—	+	+	—	+	+	—	+
1—ε)	—	+	—	—	+	—	—	+	+	+
1)	0	0	—	0	+	—	0	+	+	+

Отсюда видимъ, что число перемѣнъ въ ряду знаковъ, какъ при $t = \varepsilon$, такъ и при $t = 1 - \varepsilon$, равно k, — и стало-быть разность между первымъ и вторымъ числомъ перемѣнъ равна 0.

Сдѣланное допущеніе относительно A_1; A_3, A_5,..., A_{2k-3} даетъ наибольшее число перемѣнъ при $t=\varepsilon$ и наименьшее при $t=1-\varepsilon$; и такъ какъ разность между этими наибольшимъ и наименьшимъ числами есть 0, то всякое другое допущеніе привело-бы къ отрицательной разности, — что невозможно.

Слѣдовательно между количествами A_1, A_3, A_5,..., A_{2k-3} нѣтъ подъ-рядъ однозначныхъ и нѣтъ равныхъ 0; значитъ допущеніе, которое относительно ихъ сдѣлано, — единственно возможное.

При этомъ единственно-возможномъ допущеніи разность между числами перемѣнъ при $t=\varepsilon$ и при $t=1-\varepsilon$, равна 0; стало-быть функція T_{2k} не имѣетъ корней между 0 и 1, — другими словами — на всемъ пути t отъ 0 до 1 она сохраняетъ знакъ *). По этому, опираясь на n⁰ 379, можно въ остаточномъ членѣ R, оставляя T_{2k} подъ знакомъ интеграла, вынести изъ-подъ знака интеграла функцію $f^{(2k)}(a+\omega-\omega t)$ среднимъ ея значеніемъ; тогда:

$$R=\omega^{2k+1}f^{(2k)}(a+\omega-\theta_1\omega)\int_0^1 T_{2k}\,dt-\omega^{2k+1}f^{(2k)}(a+\theta\omega)\int_0^1 T_{2k}\,dt.$$

$$\left(\theta_1 \begin{matrix}>0\\<1\end{matrix}, \quad 1-\theta_1=\theta \begin{matrix}>0\\<1\end{matrix}\right).$$

А такъ какъ:

$$\int_0^1 T_{2k}\,dt=\left[\frac{t^{2k+1}}{1.2...(2k+1)}+\frac{At^{2k}}{1.2...2k}+\frac{A_1t^{2k-1}}{1.2...(2k-1)}+\frac{A_3t^{2k-3}}{1.2...(2k-3)}+...+\frac{A_{2k-3}t^3}{1.2.3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{1.2...(2k+1)}+\frac{A}{1.2...2k}+\frac{A_1}{1.2...(2k-1)}+\frac{A_3}{1.2...(2k-3)}+...+\frac{A_{2k-3}}{1.2.3}$$

$$=\frac{1}{1.2...(2k+1)}+\frac{A}{1.2...2k}+\frac{A_1}{1.2...(2k-1)}+...+\frac{A_{2k-3}}{1.2.3}+A_{2k-1}-A_{2k-1}=-A_{2k-1},$$

то:

$$R=-A_{2k-1}\,\omega^{2k+1}f^{(2k)}(a+\theta\omega)=-A_{2k-1}\,\omega^{2k+1}f^{(2k)}(\overline{a.a_1}),$$

гдѣ $f^{(2k)}(\overline{a.a_1})$ есть значеніе $f^{(2k)}(x)$ для x средняго между a и a_1.

---

*) Знакъ этотъ + или —, смотря потому, четное k или нечетное.

И такъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)dx = \omega\frac{f(a)+f(a_1)}{2} - A_1\omega^2[f'(a_1)-f'(a)] - A_3\omega^4[f'''(a_1)-f'''(a)] - \dots$$

$$\dots - A_{2k-3}\omega^{2k-2}[f^{(2k-3)}(a_1) - f^{(2k-3)}(a)] - A_{2k-1}\omega^{2k+1}f^{(2k)}(\overline{a.a_1})$$

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = \omega\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2} - A_1\omega^2[f'(a_2)-f'(a_1)] - A_3\omega^4[f'''(a_2)-f'''(a_1)] - \dots$$

$$\dots - A_{2k-3}\omega^{2k-2}[f^{(2k-3)}(a_2) - f^{(2k-3)}(a_1)] - A_{2k-1}\omega^{2k+1}f^{(2k)}(\overline{a_1.a_2})$$

$$\int_{a_2}^{a_3} f(x)dx = \omega\frac{f(a_2)+f(a_3)}{2} - A_1\omega^2[f'(a_3)-f'(a_2)] - A_3\omega^4[f'''(a_3)-f'''(a_2)] - \dots$$

$$\dots - A_{2k-3}\omega^{2k-2}[f^{(2k-3)}(a_3) - f^{(2k-3)}(a_2)] - A_{2k-1}\omega^{2k+1}f^{(2k)}(\overline{a_2.a_3})$$

. . . .

. . . .

$$\int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx = \omega\frac{f(a_{n-1})+f(b)}{2} \quad A_1\omega^2[f'(b)-f'(a_{n-1})] - A_3\omega^4[f'''(b)-f'''(a_{n-1})] - \dots$$

$$\dots - A_{2k-3}\omega^{2k-2}[f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a_{n-1})] - A_{2k-1}\omega^{2k+1}f^{(2k)}(\overline{a_{n-1}.b}).$$

Сложеніе всѣхъ этихъ интеграловъ доставитъ:

$$\int_a^b f(x)dx = \omega\left[\frac{f(a)}{2} + f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right] - A_1\omega^2[f'(b) - f'(a)] -$$

$$- A_3\omega^4[f'''(b) - f'''(a)] - \dots - A_{2k-3}\omega^{2k-2}[f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a)] + r,$$

гдѣ:

$$r = -A_{2k-1}\omega^{2k+1}\left[f^{(2k)}(\overline{a.a_1}) + f^{(2k)}(\overline{a_1.a_2}) + f^{(2k)}(\overline{a_2.a_3}) + \dots + f^{(2k)}(\overline{a_{n-1}.b})\right]$$

$$= -A_{2k-1}\omega^{2k}(b-a)\frac{f^{(2k)}(\overline{a.a_1}) + f^{(2k)}(\overline{a_1.a_2}) + \dots + f^{(2k)}(\overline{a_{n-1}.b})}{n}$$

$$= -A_{2k-1}\omega^{2k}(b-a)f^{(2k)}(\overline{a.b}).$$

Давая k значенія 1, 2, 3, . . . , получимъ слѣдующія формулы:

$$\int_a^b f(x)dx = \omega\left[\frac{f(a)}{2}+f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right]-\frac{1}{12}\omega^2(b-a)f''(\overline{a.b}),$$

$$\int_a^b f(x)dx = \omega\left[\frac{f(a)}{2}+f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right]-\frac{1}{12}\omega^2\left[f'(b)-f'(a)\right]+$$
$$+\frac{1}{720}\omega^4(b-a)f^{(4)}(\overline{a.b}).$$

$$\int_a^b f(x)dx = \omega\left[\frac{f(a)}{2}+f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right]-\frac{1}{12}\omega^2\left[f'(b)-f'(a)\right]+$$
$$+\frac{1}{720}\omega^4\left[f'''(b)-f'''(a)\right]-\frac{1}{30240}\omega^6(b-a)f^{(6)}(\overline{a.b}),$$

и т. д.

Изъ нихъ вторую мы имѣли въ n⁰ 381.

587. Формула Остроградскаго (частный случай ея приведенъ въ n⁰ 385). Возьмемъ между a и a_1, a_1 и a_2, a_2 и a_3, $\ldots$, a_{n-1} и b, среднія ариѳметическія: α, α_1, α_2, $\ldots$, α_{n-1}; тогда рядъ: a, α, a_1, α_1, a_2, α_2, $\ldots$, a_{n-1}, α_{n-1}, b, составитъ ариѳметическую прогрессію съ разностью $\frac{\omega}{2}$. Эту разность обозначимъ чрезъ h, а интегралъ $\int f(x)\,dx$, какъ и прежде, — чрезъ $\varphi(x)+C$.

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = \varphi(a_1)-\varphi(a) = \varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha-h);$$

$$\varphi(\alpha+h) = \varphi(\alpha)+h\varphi'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(\alpha)+\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(\alpha)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h^{2k}}{1.2\ldots2k}\varphi^{(2k)}(\alpha)+\int_0^h\frac{t^{2k}}{1.2\ldots2k}\varphi^{(2k+1)}(\alpha+h-t)\,dt,$$

$$\varphi(\alpha-h) = \varphi(\alpha)-h\varphi'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(\alpha)-\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(\alpha)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h^{2k}}{1.2\ldots2k}\varphi^{(2k)}(\alpha)+\int_0^{-h}\frac{t^{2k}}{1.2\ldots2k}\varphi^{(2k+1)}(\alpha-h-t)\,dt,$$

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = 2h\,f(\alpha)+\frac{2h^3}{1.2.3}f''(\alpha)+\ldots+\frac{2h^{2k-1}}{1.2\ldots(2k-1)}f^{(2k-2)}(\alpha)+$$
$$+\int_0^h\frac{t^{2k}}{1.2\ldots2k}f^{(2k)}(\alpha+h-t)\,dt-\int_0^{-h}\frac{t^{2k}}{1.2\ldots2k}f^{(2k)}(\alpha-h-t)\,dt.$$

Два послѣдніе интеграла соединимъ въ одинъ, преобразовывая второй въ интегралъ съ предѣлами 0 и h:

$$\int_0^{-h} \frac{t^{2k}}{1.2\ldots 2k} f^{(2k)}(\alpha - h - t)\,dt = -\int_0^h \frac{t^{2k}}{1.2\ldots 2k} f^{(2k)}(\alpha - h + t)\,dt,$$

$$\int_0^h \frac{t^{2k}}{1.2\ldots 2k} f^{(2k)}(\alpha + h - t)\,dt - \int_0^{-h} \frac{t^{2k}}{1.2\ldots 2k} f^{(2k)}(\alpha - h - t)\,dt =$$

$$= \int_0^h \frac{t^{2k}}{1.2\ldots 2k}\Big[f^{(2k)}(\alpha + h - t) + f^{(2k)}(\alpha - h + t)\Big]dt;$$

тогда:

$$(1)\quad \int_a^{a_1} f(x)\,dx = 2h\,f(\alpha) + \frac{2h^3}{1.2.3} f''(\alpha) + \ldots + \frac{2h^{2k-1}}{1.2\ldots(2k-1)} f^{(2k-2)}(\alpha) +$$

$$+ \int_0^h \frac{t^{2k}}{1.2\ldots 2k}\Big[f^{(2k)}(\alpha + h - t) + f^{(2k)}(\alpha - h + t)\Big]dt.$$

Также найдемъ:

$$(2)\quad f'(a_1) - f'(a) = 2h\,f''(\alpha) + \frac{2h^3}{1.2.3} f^{(4)}(\alpha) + \ldots + \frac{2h^{2k-3}}{1.2\ldots(2k-3)} f^{(2k-2)}(\alpha) +$$

$$+ \int_0^h \frac{t^{2k-2}}{1.2\ldots(2k-2)}\Big[f^{(2k)}(\alpha + h - t) + f^{(2k)}(\alpha - h + t)\Big]dt$$

$$(3)\quad f'''(a_1) - f'''(a) = 2h\,f^{(4)}(\alpha) + \frac{2h^3}{1.2.3} f^{(6)}(\alpha) + \ldots + \frac{2h^{2k-5}}{1.2\ldots(2k-5)} f^{(2k-2)}(\alpha) +$$

$$+ \int_0^h \frac{t^{2k-4}}{1.2\ldots(2k-4)}\Big[f^{(2k)}(\alpha + h - t) + f^{(2k)}(\alpha - h + t)\Big]dt$$

. . . .

. . . .

$$(k)\quad f^{(2k-3)}(a_1) - f^{(2k-3)}(a) = 2h f^{(2k-2)}(\alpha) + \int_0^h \frac{t^2}{1.2}\Big[f^{(2k)}(\alpha + h - t) + f^{(2k)}(\alpha - h + t)\Big]dt.$$

Помножимъ (2) на $A_1\,h^2$, (3) на $A_2\,h^4$, (4) на $A_3\,h^6, \ldots,$ (k) на $A_{k-1}\,h^{2k-2}$ ($A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{k-1}$ произвольныя числа), произведенія сложимъ и къ полученной суммѣ прибавимъ (1); получимъ:

$$(a)\quad \int_a^{a_1} f(x)\,dx + A_1 h^2\left[f'(a_1)-f'(a)\right] + A_2 h^4\left[f'''(a_1)-f'''(a)\right] + \ldots$$

$$\ldots\ldots + A_{k-1} h^{2k-2}\left[f^{(2k-3)}(a_1)-f^{(2k-3)}(a)\right] -$$

$$-2hf(\alpha)+2h^3f''(\alpha)\left[\frac{1}{1.2.3}+A_1\right]+2h^5f^{(4)}(\alpha)\left[\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{A_1}{1.2.3}+A_2\right]+\ldots$$

$$\ldots+2h^{2k-1}f^{(2k-2)}(\alpha)\left[\frac{1}{1.2\ldots(2k-1)}+\frac{A_1}{1.2\ldots(2k-3)}+\frac{A_2}{1.2\ldots(2k-5)}+\ldots+\frac{A_{k-2}}{1.2.3}+A_{k-1}\right]+$$

$$+\int_0^h\left[\frac{t^{2k}}{1.2\ldots 2k}+\frac{A_1h^2t^{2k-2}}{1.2\ldots(2k-2)}+\frac{A_2h^4t^{2k-4}}{1.2\ldots(2k-4)}+\ldots+\frac{A_{k-1}h^{2k-2}t^2}{1.2}\right]\left[f^{(2k)}(\alpha+h-t)+f^{(2k)}(\alpha-h+t)\right]dt.$$

Числа $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{k-1}$ подчинимъ условіямъ:

$$\frac{1}{1.2.3}+A_1=0$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{A_1}{1.2.3}+A_2=0$$

$$(b)\quad \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{A_1}{1.2.3.4.5}+\frac{A_2}{1.2.3}+A_3=0$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{1.2\ldots(2k-1)}+\frac{A_1}{1.2\ldots(2k-3)}+\frac{A_2}{1.2\ldots(2k-5)}+\ldots+\frac{A_{k-2}}{1.2.3}+A_{k-1}=0,$$

вообще:

$$\frac{1}{1.2\ldots(2s+1)}+\frac{A_1}{1.2\ldots(2s-1)}+\frac{A_2}{1.2\ldots(2s-3)}+\ldots+\frac{A_{s-1}}{1.2.3}+A_s=0.$$

Эти условія даютъ:

$$A_1=-\frac{1}{6},\ A_2=\frac{7}{360},\ A_3=-\frac{31}{15120},\ \text{и т. д.,}$$

и (a) тогда принимаетъ видъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = 2hf(\alpha) - A_1h^2\left[f'(a_1)-f'(a)\right] - A_2h^4\left[f'''(a_1)-f'''(a)\right] - \ldots$$

$$\ldots - A_{k-1}h^{2k-2}\left[f^{(2k-3)}(a_1)-f^{(2k-3)}(a)\right] + R,$$

гдѣ:

$$R=\int_0^h\left[\frac{t^{2k}}{1.2...2k}+\frac{A_1h^2t^{2k-2}}{1.2...(2k-2)}+\frac{A_2h^4t^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+...+\frac{A_{k-1}h^{2k-2}t^2}{1.2}\right]\left[f^{(2k)}(\alpha+h-t)+f^{(2k)}(\alpha-h+t)\right]dt$$

$$=h^{2k+1}\int_0^1\left[\frac{t^{2k}}{1.2...2k}+\frac{A_1t^{2k-2}}{1.2...(2k-2)}+\frac{A_2t^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+...+\frac{A_{k-1}t^2}{1.2}\right]\left[f^{(2k)}(\alpha+h-ht)+f^{(2k)}(\alpha-h+ht)\right]dt,$$

или, полагая $\frac{t^{2k}}{1.2...2k}+\frac{A_1t^{2k-2}}{1.2...(2k-2)}+...+\frac{A_{k-1}t^2}{1.2}=T_{2k}$:

$$R=h^{2k+1}\int_0^1 T_{2k}\left[f^{(2k)}(\alpha+h-ht)+f^{(2k)}(\alpha-h+ht)\right]dt.$$

Докажемъ, что на всемъ пути t между 0 и 1 функція T_{2k} сохраняетъ знакъ.

$$T_{2k}=\frac{t^{2k}}{1.2...2k}+\frac{A_1t^{2k-2}}{1.2...(2k-2)}+\frac{A_2t^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+....+\frac{A_{k-2}t^4}{1.2.3.4}+\frac{A_{k-1}t^2}{1.2}$$

$$T_{2k}'=\frac{t^{2k-1}}{1.2...(2k-1)}+\frac{A_1t^{2k-3}}{1.2...(2k-3)}+\frac{A_2t^{2k-5}}{1.2...(2k-5)}+....+\frac{A_{k-2}t^3}{1.2.3}+A_{k-1}t$$

$$T_{2k}''=\frac{t^{2k-2}}{1.2...(2k-2)}+\frac{A_1t^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+\frac{A_2t^{2k-6}}{1.2...(2k-6)}+....+\frac{A_{k-2}t^2}{1.2}+A_{k-1}$$

$$T_{2k}'''=\frac{t^{2k-3}}{1.2...(2k-3)}+\frac{A_1t^{2k-5}}{1.2...(2k-5)}+\frac{A_2t^{2k-7}}{1.2...(2k-7)}+....+\frac{A_{k-3}t^3}{1.2.3}+A_{k-2}t$$

$$T_{2k}^{(4)}=\frac{t^{2k-4}}{1.2...(2k-4)}+\frac{A_1t^{2k-6}}{1.2...(2k-6)}+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+\frac{A_{k-3}t^2}{1.2}+A_{k-2}$$

. . . .

. . . .

$$T_{2k}^{(2k-4)}=\frac{t^4}{1.2.3.4}+\frac{A_1t^2}{1.2}+A_2$$

$$T_{2k}^{(2k-3)}=\frac{t^3}{1.2.3}+A_1t$$

$$T_{2k}^{(2k-2)}=\frac{t^2}{1.2}+A_1$$

$$T_{2k}^{(2k-1)}=t$$

$$T_{2k}^{(2k)}=1$$

$$\left(T_{2k}\right)_0=0,\qquad \left(T_{2k}\right)_1=\frac{1}{1.2...2k}+\frac{A_1}{1.2...(2k-2)}+\frac{A_2}{1.2...(2k-4)}+...+\frac{A_{k-2}}{1.2.3.4}+\frac{A_{k-1}}{1.2},$$

$$\left(T_{2k}'\right)_0=0,\qquad \left(T_{2k}'\right)_1=\frac{1}{1.2...(2k-1)}+\frac{A_1}{1.2...(2k-3)}+...+\frac{A_{k-2}}{1.2.3}+A_{k-1}=0,$$

$$\left(T_{2k}''\right)_0=A_{k-1},\ \left(T_{2k}''\right)_1=\frac{1}{1.2...(2k-2)}+\frac{A_1}{1.2...(2k-4)}+...+\frac{A_{k-2}}{1.2}+A_{k-1},$$

$$\left(T_{2k}'''\right)_0=0,\qquad \left(T_{2k}'''\right)_1=\frac{1}{1.2...(2k-3)}+\frac{A_1}{1.2...(2k-5)}+...+\frac{A_{k-3}}{1.2.3}+A_{k-2}=0,$$

$$\left(T_{2k}^{(4)}\right)_0=A_{k-2},\ \left(T_{2k}^{(4)}\right)_1=\frac{1}{1.2...(2k-4)}+\frac{A_1}{1.2...(2k-6)}+...+\frac{A_{k-3}}{1.2}+A_{k-2},$$

. . . .

. . . .

$$\left(T_{2k}^{(2k-4)}\right)_0=A_2,\quad \left(T_{2k}^{(2k-4)}\right)_1=\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{A_1}{1.2}+A_2,$$

$$\left(T_{2k}^{(2k-3)}\right)_0=0,\quad \left(T_{2k}^{(2k-3)}\right)_1=\frac{1}{1.2.3}+A_1=0,$$

$$\left(T_{2k}^{(2k-2)}\right)_0=A_1,\quad \left(T_{2k}^{(2k-2)}\right)_1=\frac{1}{1.2}+A_1,$$

$$\left(T_{2k}^{(2k-1)}\right)_0=0,\quad \left(T_{2k}^{(2k-1)}\right)_1=1,$$

$$\left(T_{2k}^{(2k)}\right)_0=1,\qquad \left(T_{2k}^{(2k)}\right)_1=1.$$

Видимъ, что каждая изъ производныхъ T_{2k} нечетнаго порядка обращается въ 0, какъ при $t=0$, такъ и при $t=1$, — кромѣ производной $(2k-1)$-го порядка, которая при $t=0$ обращается въ 0, а при $t=1$ въ 1.

Допустимъ, что между количествами:

$$(c)\qquad A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ .\ .\ .\ .\ ,\ A_{k-2},\ A_{k-1},$$

$$(\partial)\qquad (T_{2k}^{(2k-2)})_1,\ (T_{2k}^{(2k-4)})_1,\ .\ .\ .\ .,\ (T_{2k}^{(4)})_1,\ (T_{2k}'')_1,\ (T_{2k})_1,$$

нѣтъ равныхъ 0, и что знаки ихъ, какъ въ первомъ ряду, такъ и во второмъ, идутъ чередуясь; тогда, подставляя въ функціи:

$$T_{2k},\ T_{2k}',\ T_{2k}'',\ T_{2k}''',\ .\ .\ .\ .\ ,\ T_{2k}^{(2k-2)},\ T_{2k}^{(2k-1)},\ T_{2k}^{(2k)}$$

на мѣсто t послѣдовательно: 0, ε, $1-\varepsilon$ и 1 (ε болѣе 0 и безк. мало), принимая при этомъ во вниманіе только знаки функцій и имѣя въ виду, что $A_1 < 0$, $(T_{2k}^{(2k-2)})_1 > 0$, получимъ:

при k четномъ:

	T_{2k}	T_{2k}'	T_{2k}''	.	.	.	.	. .	.	.	.	. ,	$T_{2k}^{(2k-2)}$	$T_{2k}^{(2k-1)}$	$T_{2k}^{(2k)}$
0)	0	0	—	0	+	0	—	...	-	0	+	0	—	0	+
ε)	—	—	—	+	+	—	—	...	—	+	+	—	—	+	+
1—ε)	—	—	+	+	—	—	+	...	+	+	. .	—	+	+	+
1)	—	0	+	0	—	0	+	...	+	0	—	0	+	+	+,

при k нечетномъ:

0)	0	0	+	0	—	0	+		—	0	+	0	—	0	+
ε)	+	+	+	—	—	+	+		—	+	+	—	—	+	+
1—ε)	+	+	—	—	+	+	—		+	+	—	—	+	+	+
1)	+	0	—	0	+	0	—		+	0	—	0	+	+	+

Число перемѣнъ въ такомъ предположеніи въ рядахъ знаковъ равно $k-1$, какъ при $t=\varepsilon$, такъ и при $t=1-\varepsilon$; стало-быть разность между этими числами равна 0. Всякое другое допущеніе относительно ряда (c) дало-бы перемѣнъ при $t=\varepsilon$ менѣе $k-1$, а всякое другое допущеніе относительно ряда (d) дало-бы при $t=1-\varepsilon$ перемѣнъ болѣе, чѣмъ $k-1$. Слѣдовательно при допущеніи, отличномъ отъ сдѣланнаго, разность между числомъ перемѣнъ при $t=\varepsilon$ и числомъ перемѣнъ при $t=1-\varepsilon$ была-бы отрицательною, — что̀ невозможно. По этому сдѣланное допущеніе вѣрно. Оно приводитъ къ заключенію, что функція T_{2k} не имѣетъ корней между 0 и 1, и стало-быть сохраняетъ знакъ на всемъ пути t между 0 и 1. Знакъ этотъ — при k четномъ, + при k нечетномъ. Вслѣдствіе сохраненія знака T_{2k}, мы можемъ остаточный членъ R, входящій въ разложеніе интеграла $\int_a^{m_1} f(x)\,dx$, преобразовать такъ:

$$R = h^{2k+1}\left[f^{(2k)}(\alpha+h-\theta h)+f^{(2k)}(\alpha-h+\theta h)\right]\int_0^1 T_{2k}\,dt \qquad \begin{pmatrix}\theta>0\\ <1\end{pmatrix}$$

$$= h^{2k+1}\left[f^{(2k)}(\overline{\alpha.a_1})+f^{(2k)}(\overline{a.\alpha})\right]\int_0^1 T_{2k}\,dt$$

$$= 2h^{2k+1} f^{(2k)}(\overline{a.a_1}) \int_0^1 T_{2k}\, dt \qquad \left(\begin{array}{c} f^{(2k)}(\overline{a.a_1}) \text{ есть значеніе } f^{(2k)}(x) \text{ для} \\ x \text{ средняго между } a \text{ и } a_1 \end{array}\right).$$

Но:

$$\int_0^1 T_{2k}\, dt = \left[\frac{t^{2k+1}}{1.2...(2k+1)} + \frac{A_1 t^{2k-1}}{1.2...(2k-1)} + \frac{A_2 t^{2k-3}}{1.2...(2k-3)} + ... + \frac{A_{k-2} t^5}{1.2.3.4.5} + \frac{A_{k-1} t^3}{1.2.3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{1.2...(2k+1)} + \frac{A_1}{1.2...(2k-1)} + \frac{A_2}{1.2...(2k-3)} + ... + \frac{A_{k-2}}{1.2.3.4.5} + \frac{A_{k-1}}{1.2.3} = -A_k;$$

и потому:

$$R = -2A_k h^{2k+1} f^{(2k)}(\overline{a.a_1}).$$

Слѣдовательно:

$$\int_a^{a_1} f(x)dx = 2hf(\alpha) - A_1 h^2 \left[f'(a_1) - f'(a)\right] - A_2 h^4 \left[f'''(a_1) - f'''(a)\right] - ....$$

$$.... - A_{k-1} h^{2k-2} \left[f^{(2k-3)}(a_1) - f^{(2k-3)}(a)\right] - 2A_k h^{2k+1} f^{(2k)}(\overline{a.a_1})$$

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = 2hf(\alpha_1) - A_1 h^2 \left[f'(a_2) - f'(a_1)\right] - A_2 h^4 \left[f'''(a_2) - f'''(a_1)\right] - ....$$

$$.... - A_{k-1} h^{2k-2} \left[f^{(2k-3)}(a_2) - f^{(2k-3)}(a_1)\right] - 2A_k h^{2k+1} f^{(2k)}(\overline{a_1.a_2})$$

....

....

$$\int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx = 2hf(\alpha_{n-1}) - A_1 h^2 \left[f'(b) - f'(a_{n-1})\right] - A_2 h^4 \left[f'''(b) - f'''(a_{n-1})\right] - ....$$

$$.... - A_{k-1} h^{2k-2} \left[f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a_{n-1})\right] - 2A_k h^{2k+1} f^{(2k)}(\overline{a_{n-1}.b}).$$

Складывая, получимъ:

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(\alpha) + f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + ... + f(\alpha_{n-1})\right] - A_1 h^2 \left[f'(b) - f'(a)\right] -$$

$$- A_2 h^4 \left[f'''(b) - f'''(a)\right] - ... - A_{k-1} h^{2k-2} \left[f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a)\right] + r;$$

или:

$$\int_a^b f(x)dx = \omega\left[f(\alpha) + f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + ... + f(\alpha_{n-1})\right] - \frac{A_1 \omega^2}{2^2}\left[f'(b) - f'(a)\right] -$$

$$- \frac{A_2 \omega^4}{2^4}\left[f'''(b) - f'''(a)\right] - ... - \frac{A_{k-1} \omega^{2k-2}}{2^{2k-2}}\left[f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a)\right] + r,$$

гдѣ:

$$r = -2A_k h^{2k+1}\left[f^{(2k)}(\overline{a.a_1}) + f^{(2k)}(\overline{a_1.a_2}) + \ldots + f^{(2k)}(\overline{a_{n-1}.b})\right]$$

$$= -A_k h^{2k}.(b-a)\,\frac{f^{(2k)}(\overline{a\ a_1}) + f^{(2k)}(\overline{a_1.a_2}) + \ldots + f^{(2k)}(\overline{a_{n-1}.b})}{n}$$

$$= -\frac{A_k\omega^{2k}(b-a)}{2^{2k}}\,f^{(2k)}(\overline{a.b}).$$

Давая k значенія: 1, 2, 3, ..., получимъ слѣдующія формулы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \omega\left[f(\alpha) + f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_{n-1})\right] + \frac{1}{24}\omega^2(b-a)f''(\overline{a.b}),$$

$$\int_a^b f(x)dx = \omega\left[f(\alpha) + f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_{n-1})\right] + \frac{1}{24}\omega^2\left[f'(b) - f'(a)\right]\ \frac{7}{5760}\omega^4(b-a)f^{(4)}(\overline{a.b}),$$

$$\int_a^b f(x)dx = \omega\left[f(\alpha) + f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_{n-1})\right] + \frac{1}{24}\omega^2\left[f'(b) - f'(a)\right] - \frac{7}{5760}\omega^4\left[f'''(b) - f'''(a)\right] +$$

$$+ \frac{31}{967680}\omega^6(b-a)f^{(6)}(\overline{a.b}),\ \text{и т. д.}$$

Вторая изъ этихъ формулъ была приведена въ n° 385.

Усиливать степень приближенія суммы:

$$\omega\left[f(\alpha) + f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_{n-1})\right] - \frac{A_1\omega^2}{2^2}\left[f'(b) - f'(a)\right] -$$

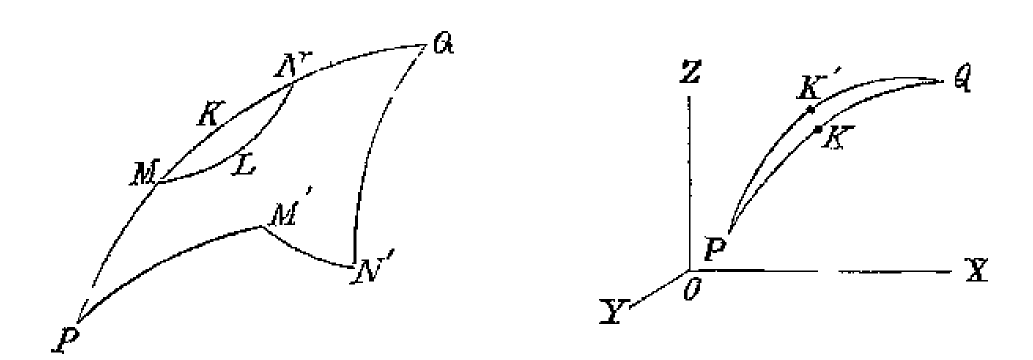
$$- \frac{A_2\omega^4}{2^4}\left[f'''(b) - f'''(a)\right] - \ldots - \frac{A_{k-1}\omega^{2k-2}}{2^{2k-2}}\left[f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a)\right]$$

къ интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$ можно какъ увеличивая n (или, что все равно, уменьшая ω), такъ и увеличивая k.

Геодезическія линіи.

588. Изъ всѣхъ линій, проведенныхъ по поверхности между двумя взятыми на ней точками, кратчайшую называютъ *геодезическою* между этими точками. Если линія PQ—геодезическая между точками

P и Q, то и часть ея MKN будетъ геодезической между точками M и N, — потому что если-бы линія MLN (проведенная по той же поверхности) была короче MKN, то и линія $PMLNQ$ короче PQ, и слѣдовательно PQ не геодезическая. Обратное заключеніе не имѣетъ



мѣста; такъ, если PM', $M'N'$, $N'Q$ — линіи геодезическія, первая между точками P и M', вторая между M' и N', третья между N' и Q, то отсюда не слѣдуетъ, что и линія $PM'N'Q$ — геодезическая.

Пусть линія PKQ между точками $P(x_0, y_0, z_0)$ и $Q(x_1, y_1, z_1)$ на поверхности

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{(координаты прямоугольныя)}$$

— геодезическая, линія $PK'Q$ — смежная съ нею на той же поверхности, точки: $K(x, y, z)$ и $K'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ — соотвѣтствующія на этихъ линіяхъ *). Координаты точекъ K и K', какъ точекъ, принадлежащихъ поверхности, удовлетворяютъ уравненію поверхности; по этому:

$$f(x, y, z) = 0, \; f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0.$$

Изъ безконечно-малыхъ величинъ δx, δy и δz двѣ произвольны, а третья опредѣляется послѣднимъ уравненіемъ, которому можно дать видъ:

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \omega_2 = 0,$$

---

*) Соотвѣтствующія точки двухъ смежныхъ линій, это—точки пересѣченія ихъ системою какихъ-нибудь поверхностей одной категоріи, напр. шаровыхъ поверхностей, или параллельныхъ плоскостей, или плоскостей, проходящихъ чрезъ одну и туже прямую, и проч.

или:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \omega_2 = 0, \quad \left(\begin{matrix}\omega_2 \text{ безк. малая} \\ \text{втораго порядка}\end{matrix}\right)$$

откуда:

$$\delta z = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y}{\frac{\partial f}{\partial z}} + \omega'_2. \quad \left(\begin{matrix}\omega'_2 \text{ безк. малая} \\ \text{втораго порядка}\end{matrix}\right)$$

Координаты точекъ геодезической линіи, которую можно разсматривать, какъ пересѣченіе данной поверхности другою поверхностью, удовлетворяютъ и уравненію этой другой поверхности; и потому изъ трехъ перемѣнныхъ x, y и z одна независимая, или каждую изъ нихъ можно разсматривать какъ функцію нѣкоторой независимой перемѣнной t. Пусть значеніе этой перемѣнной для точекъ P и Q будутъ t_0 и t_1; s_0 — длина геодезической линіи PKQ, s_1 — длина смежной съ нею линіи $PK'Q$; тогда:

$$s_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} \cdot dt,$$

$$s_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[d(x + \delta x)]^2 + [d(y + \delta y)]^2 + [d(z + \delta z)]^2},$$

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sqrt{[d(x+\delta x)]^2 + [d(y+\delta y)]^2 + [d(z+\delta z)]^2} - \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \right\}.$$

Принимая δz за величину зависимую, мы можемъ δx и δy считать произвольными (но безконечно-малыми) функціями t, и при томъ обращающимися въ 0 при $t = t_0$ и при $t = t_1$ (потому что концы P и Q геодезической и смежной съ нею линій — общіе). Вмѣстѣ съ δx и δy, конечно, и δz обращается въ 0 при $t = t_0$ и при $t = t_1$.

Такъ какъ $s_1 > s_0$, то разность $s_1 - s_0$ сохраняетъ знакъ $+$ при всевозможныхъ безконечно-малыхъ δx и δy. Чтобы вывести условіе, необходимое для сохраненія знака, преобразуемъ разность $s_1 - s_0$. Обозначая длину дуги PK чрезъ s, имѣемъ:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds,$$

$$\sqrt{[d(x+\delta x)]^2+[d(y+\delta y)]^2+[d(z+\delta z)]^2}=$$

$$=\sqrt{ds^2+2(dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z)+(d\delta x)^2+(d\delta y)^2+(d\delta z)^2}$$

$$=ds\left[1+\frac{2(dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z)}{ds^2}+\varepsilon_2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=ds+\frac{dx}{ds}d\delta x+\frac{dy}{ds}d\delta y+\frac{dz}{ds}d\delta z+\varepsilon_2{}'ds$$ (ε_2 и $\varepsilon_2{}'$ безконечно-малыя втораго порядка).

Слѣдовательно:

$$s_1-s_0=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{dx}{ds}d\delta x+\frac{dy}{ds}d\delta y+\frac{dz}{ds}d\delta z+\varepsilon_2{}'ds\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}d\left(\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z\right)-\int_{t_0}^{t_1}\left(d\frac{dx}{ds}\delta x+d\frac{dy}{ds}\delta y+d\frac{dz}{ds}\delta z-\varepsilon_2{}'ds\right)$$

$$=\left(\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z\right)_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\left(d\frac{dx}{ds}\delta x+d\frac{dy}{ds}\delta y+d\frac{dz}{ds}\delta z-\varepsilon_2{}'ds\right).$$

Каждый изъ множителей δx, δy и δz, какъ при $t=t_0$, такъ и при $t=t_1$, обращается въ 0; и потому:

$$\left(\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z\right)_{t_0}^{t_1}=0;$$

слѣдовательно:

$$s_1-s_0=-\int_{t_0}^{t_1}\left(d\frac{dx}{ds}\delta x+d\frac{dy}{ds}\delta y+d\frac{dz}{ds}\delta z-\varepsilon_2{}'ds\right),$$

или, замѣняя δz выраженіемъ его въ δx и δy:

$$s_1-s_0=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y}{\frac{\partial f}{\partial z}}-\omega_2{}'\right)d\frac{dz}{dz}\quad d\frac{dx}{ds}\delta x-d\frac{dy}{ds}\delta y+\varepsilon_2{}'ds\right\}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}d\frac{dz}{ds}-\frac{\partial f}{\partial z}d\frac{dx}{ds}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\delta x+\frac{\frac{\partial f}{\partial y}d\frac{dz}{ds}-\frac{\partial f}{\partial z}d\frac{dy}{ds}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\delta y+\varepsilon_2{}'ds-\omega_2{}'d\frac{dz}{ds}\right].$$

Если подъ знакомъ интеграла коэффиціенты при δx и δy не нули, то интегралъ не можетъ сохранять знакъ, — потому что съ перемѣною знаковъ δx и δy (при сохраненіи ихъ абсолютныхъ величинъ), знакъ подъинтегральной функціи, а стало-быть и знакъ самого интеграла, измѣняется на противоположный *). По этому:

$$\frac{\partial f}{\partial x} d\frac{dz}{ds} - \frac{\partial f}{\partial z} d\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} d\frac{dz}{ds} - \frac{\partial f}{\partial z} d\frac{dy}{ds} = 0,$$

или:

$$(a) \qquad \frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Числители этихъ дробей пропорціональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ главною нормалью къ геодезической линіи съ осями координатъ, а знаменатели — косинусамъ угловъ между нормалью къ поверхности и тѣми же осями; и потому уравненіямъ (a) можно дать видъ:

$$(b) \qquad \frac{\cos\alpha_1}{\cos\lambda} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\mu} = \frac{\cos\gamma_1}{\cos\nu},$$

гдѣ α_1, β_1 и γ_1 — углы между главною нормалью геодезической линіи и осями координатъ, а λ, μ и ν — углы между нормалью къ поверхности и тѣми же осями; а такъ какъ: $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$, $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$, то каждое изъ послѣднихъ отношеній равно 1 или -1, и стало-быть:

или: $\alpha_1 = \lambda$, $\beta_1 = \mu$, $\gamma_1 = \nu$, или: $\alpha_1 + \lambda = \pi$, $\beta_1 + \mu = \pi$, $\gamma_1 + \nu = \pi$.

Отсюда заключаемъ, что *во всякой точкѣ геодезической линіи главная нормаль совпадаетъ съ нормалью къ поверхности*; другими словами: *нормаль къ поверхности лежитъ въ плоскости кривизны*.

Одно изъ двухъ уравненій (a), а стало-быть и одно изъ двухъ уравненій (b), должно быть слѣдствіемъ другаго; иначе, присоединяя къ нимъ еще уравненіе поверхности, имѣли-бы три уравненія, связы-

---

*) Часть $\varepsilon_2' d s - \omega_2' d\frac{dz}{ds}$ не имѣетъ при этомъ вліянія на знакъ, какъ безконечно-малая высшаго порядка.

вающія x, y и z. Ограничиваясь уравненіемъ $\frac{\cos\alpha_1}{\cos\lambda}=\frac{\cos\beta_1}{\cos\mu}$, чтобы получить изъ него другое, употребимъ слѣдующія преобразованія:

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\lambda}=\frac{\cos\beta_1}{\cos\mu}=\frac{\cos\alpha\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\lambda}=\frac{\cos\beta\cos\beta_1}{\cos\beta\cos\mu}=\frac{\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1}{\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu}.$$

Если α, β и γ — углы между касательною къ геодезической линіи и осями координатъ, то, вслѣдствіе взаимной перпендикулярности касательной и главной нормали, а также касательной и нормали къ поверхности, имѣемъ:

$$\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1=0.$$

$$\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0,$$

откуда:

$$\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1=-\cos\gamma\cos\gamma_1,$$

$$\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu=-\cos\gamma\cos\nu;$$

слѣдовательно:

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1}{\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu}=\frac{-\cos\gamma\cos\gamma_1}{-\cos\gamma\cos\nu}=\frac{\cos\gamma_1}{\cos\nu};$$

и потому:

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\lambda}=\frac{\cos\beta_1}{\cos\mu}=\frac{\cos\gamma_1}{\cos\nu}.$$

Нормаль къ поверхности, находясь въ плоскости кривизны, *перпендикулярна ко второй нормали геодезической линіи*; по этому, обозначая углы между второю нормалью и осями координатъ чрезъ α_{11}, β_{11} и γ_{11}, мы можемъ свойство геодезической линіи, выражаемое однимъ изъ уравненій (b), представить и подъ видомъ:

$$\cos\lambda\cos\alpha_{11}+\cos\mu\cos\beta_{11}+\cos\nu\cos\gamma_{11}=0,$$

или (такъ какъ косинусы угловъ λ, μ и ν пропорціональны производнымъ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$, а косинусы угловъ α_{11}, β_{11} и γ_{11} — разностямъ: $dy\,d^2z-dz\,d^2y$; $dz\,d^2x-dx\,d^2z$, $dx\,d^2y-dy\,d^2x$):

$$(c)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+\frac{\partial f}{\partial y}(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+\frac{\partial f}{\partial z}(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0.$$

Послѣднее уравненіе можно получить, независимо отъ геометрическихъ соображеній, преобразованіемъ одного изъ уравненій (a). Сдѣлаемъ это:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\, d\,\frac{dy}{ds} - \frac{\partial f}{\partial y}\, d\,\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(ds\, d^2 y - dy\, d^2 s) - \frac{\partial f}{\partial y}(ds\, d^2 x - dx\, d^2 s) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(dy\, ds\, d^2 s - ds^2\, d^2 y) + \frac{\partial f}{\partial y}(ds^2\, d^2 x - dx\, ds\, d^2 s) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big[dy\,(dx\, d^2 x + dy\, d^2 y + dz\, d^2 z) - (dx^2 + dy^2 + dz^2)\, d^2 y\Big] +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}\Big[(dx^2 + dy^2 + dz^2)\, d^2 x - dx(dx\, d^2 x + dy\, d^2 y + dz\, d^2 z)\Big] = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)\, dz + \frac{\partial f}{\partial y}\,(dz\, d^2 x - dx\, d^2 z)\, dz -$$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\right)(dx\, d^2 y - dy\, d^2 x) = 0.$$

Подставляя $\frac{\partial f}{\partial z}\, dz$ на мѣсто $-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\right)$, что находимъ изъ уравненія: $\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz = 0$, и сокращая потомъ на dz, получимъ уравненіе (c).

Вводя въ (c) дѣлителемъ кубъ дифференціала независимой перемѣнной, мы приведемъ уравненіе (c) къ виду:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y' z'' - z' y'') + \frac{\partial f}{\partial y}(z' x'' - x' z'') + \frac{\partial f}{\partial z}(x' y'' - y' x'') = 0;$$

а при независимой перемѣнной x оно будетъ:

(d) $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(y' z'' - z' y'') - \frac{\partial f}{\partial y} z'' + \frac{\partial f}{\partial z} y'' = 0.$

589. *Геодезическія линіи на поверхности шара.*

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{ур. поверхн. шара, при}\\ \text{началѣ коорд. въ центрѣ}\end{matrix}\right);$$

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2, \; \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \; \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Подставляя въ (d) и сокращая на 2, получимъ:

$x(y' z'' - z' y'') - yz'' + zy'' = 0$, или: $(xy' - y) z'' = (xz' - z) y''$,

откуда:

$$\frac{xy'-y}{x^2}z''=\frac{xz'-z}{x^2}y'',\ \text{или:}\ \left(\frac{y}{x}\right)'z''=\left(\frac{z}{x}\right)'y'.$$

Положимъ: $\frac{y}{x}=u$, $\frac{z}{x}=v$; тогда:

$$y=xu,\ y'=u+xu',\ y''=2u'+xu'',$$

$$z=xv,\ z'=v+xv',\ z''=2v'+xv'';$$

слѣдовательно:

$$u'(2v'+xv'')=v'(2u'+xu''),\ \text{или:}\ u'v''-v'u''=0,$$

откуда, считая u' отличнымъ отъ 0, находимъ:

$$\left(\frac{v'}{u'}\right)'=0,\ \frac{v'}{u'}=C_1 \qquad (C_1\ \text{пост. произвольная}),$$

$$v'=C_1u',\ v=C_1u+C_2 \qquad (C_2\ \text{пост. произвольная}),$$

$$z=C_1y+C_2x.$$

Послѣднее уравненіе есть уравненіе плоскости, проходящей чрезъ центръ шара: оно, въ совокупности съ уравненіемъ: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, принадлежитъ геодезическимъ линіямъ, и показываетъ стало-быть, что на поверхности шара геодезическія линіи — дуги большихъ круговъ.

Постоянныя C_1 и C_2 найдутся, когда будутъ даны двѣ точки, между которыми ищется геодезическая линія. Если данныя точки: (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1), то C_1 и C_2 найдемъ изъ уравненій:

$$z_0=C_1y_0+C_2x_0,\ z_1=C_1y_1+C_2x_1.$$

Само собою разумѣется, что координаты этихъ точекъ удовлетворяютъ и уравненію: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$.

Въ предположеніи $u'=0$, уравненіе $u'v''-v'u''=0$ также удовлетворяется; тогда: $u=C$, и стало-быть: $y=Cx$. Уравненіе $y=Cx$ (оно не заключается въ $z=C_1y+C_2x$) выражаетъ плоскость, проходящую чрезъ ось OZ, а стало-быть и чрезъ центръ шара; по этому оно, въ совокупности съ уравненіемъ поверхности шара, относится также къ дугамъ большихъ круговъ.

СОДЕРЖАНІЕ ВТОРОЙ ЧАСТИ.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

Интегралы функцій съ одной перемѣнной.

Интегралы функцій со многими перемѣнными.

ПРИБАВЛЕНІЯ.

ПОПРАВКИ ЗАМѢЧЕННЫХЪ ОШИБОКЪ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Слѣдуетъ.*
8	22	№ 317	№ 318
18	6	$+ 13x^6$	$- 9x^5$
18	10	$\frac{13}{25}\int\frac{dx}{x^2 +}$	$\frac{13}{25}\int\frac{dx}{x^2+1}$
24	18	неизвѣстными:	неизвѣстными:
35	2	$\sqrt{}ax^2 + c$	$\sqrt{ax^2 + c}$
36	11	$+ \ldots +$	$+ \ldots$
36	12	$A_m \frac{dz}{\sqrt{a_1 z^2 + c_1}}$	$A_m \int \frac{dz}{\sqrt{a_1 z^2 + c_1}}$
38	17	$\frac{1}{-xa} = z$	$\frac{1}{x - a} = z$
47	8	втѣсто	вмѣсто
61	9	Интералы:	Интегралы:
72	18	$+ C,$	$+ C.$
89	10	379.	369.
96	3	$\int^{a_2} f(x)\,dx$ a_1	$\int^{a_2} f(x)\,dx$ a_1
111	13	$\int_a f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$
143	14	$d3$	ds
160	2	Уравненіе	Уравненія
165	11	$\frac{\pi bx}{a}\sqrt{}\,c^2x^2 - a^2$	$\frac{\pi bx}{a}\sqrt{c^2x^2 - a^2}$
203	4	заключалось-бы	заключалась-бы
211	14	$\frac{x^2}{3}$	$\frac{x^3}{3}$
218	20	$\int^{\beta} e^{-\alpha x}\,d\alpha$	$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\alpha x}\,d\alpha$

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Слѣдуетъ.*
219	9	итеграль	интеграль
224	6	$\int_0^\infty e^{-x_2}dx.$	$\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$
229	16	$\int_0^\infty e^{-t_2}dt$	$\int_0^\infty e^{-t^2}dt$
229	16	$\int_0^\infty t^4 e^{-t_2}dt$	$\int_0^\infty t^4 e^{-t^2}dt$
255	8	$\ldots +$	$+$
261	8	$\ldots. +$	$+$
268	4	$\cos +$	$\cos x +$
285	19	$\int^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx.$	$\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx.$
315	11	точки k	точки K
329	11	$\frac{x^2}{1\ 2}$	$\frac{x^2}{1.2}$
333	3	$y^{(n-2)}$,	$y_0^{(n-2)}$,
380	2	ипроизводныхъ	и производныхъ
389	7	функціми	функціями
410	19	$\frac{c_2}{x+1}$	$\frac{c_2}{x+1}$,
419	4	$1.2\ .\ m$	$1.2\ldots m$
419	6	$1\ 2\ldots l$	$1.2\ldots l$
447	21	$1\ 2\ 3$	$1.2.3$
459	8	$1.2\ 3\ldots n$	$1.2.3\ldots n$
490	10	значеніе	значенія

Въ чертежахъ:

На 4-ой страницѣ: вмѣсто s слѣдуетъ S.

На 265-ой страницѣ: линіи AB и CD слѣдуетъ замѣнить продолженіями параболы BOC.

На 282-ой страницѣ: вмѣсто c' (на линіи Cc) слѣдуетъ C'.